Uitwerking tentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

5 november 2015

(1a) We bewijzen beide inclusies en concluderen vervolgens dat de verzamelingen gelijk zijn.

Stel dat $x \in \overline{A \cup B}$. Dit betekent dat $x \notin A \cup B$. Dus $x \notin A$ en $x \notin B$. En daaruit volgt dat $x \in \overline{A}$ en $x \in \overline{B}$. Dus we mogen zeggen dat $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Hieruit volgt dus dat $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Stel nu dat $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dat betekent dat $y \in \overline{A}$ en dat $y \in \overline{B}$. Dit houdt in dat $y \notin A$ en $y \notin B$, dus $y \notin A \cup B$. Hieruit mogen we concluderen dat $y \in \overline{A \cup B}$. Dus we hebben ook dat $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Dus we hebben nu bewezen dat $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(1b) We bewijzen wederom beide inclusies en concluderen vervolgens dat de verzamelingen gelijk zijn.

Stel dat $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n}$. Dat betekent dat $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Dus voor een bepaalde $n \in \mathbb{N}$ hebben we dat $x \notin C_n$. Dat betekent dus dat voor die n we hebben dat $x \in \overline{C_n}$, dus we hebben ook dat $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$. Dus we hebben nu dat $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$.

Stel nu dat $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ waarvoor geldt dat $y \in \overline{C_n}$. Dus voor die n hebben we dat $y \notin C_n$, dus dan hebben we ook dat $y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Hieruit mogen we concluderen dat $y \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n}$. Dus we hebben nu ook dat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n} \subseteq \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n}$.

We hebben nu dus bewezen dat $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$.

(1c) Stel dat we hebben dat $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n} = \emptyset$. We nemen nu aan beide zijdes van de gelijkheid het complement. Dan krijgen we dat $\overline{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n}} = \overline{\emptyset}$. Het complement van het complement van een verzameling is diezelfde verzameling weer, en het complement van de lege verzameling is in dit geval $\mathbb{R}$. Dus we hebben dat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \mathbb{R}$, en dat kan alleen maar als $C_n = \mathbb{R}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

(2a) We gebruiken een waarheidstabel. Dit geeft dat:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim (P \Rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$\sim (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Dus we zien inderdaad dat de uitspraak $\sim (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$ een tautologie is.

(2b) De bedoeling is dus dat we de volgende zin gaan omschrijven naar iets equivalents waar het teken $\sim$ niet in voorkomt.

$$\sim \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Eerst gebruiken we dat $\sim \forall x \Leftrightarrow \exists x \sim$. Dit geeft de equivalente zin:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \sim \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Nu gebruiken we dat $\sim \exists x \Leftrightarrow \forall x \sim$. Dit geeft de equivalente zin:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \sim \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Nu gebruiken we nog een keer dat $\sim \forall x \Leftrightarrow \exists x \sim$. Dit geeft de equivalente zin:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in \mathbb{R}, \sim (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Als we de uitspraak $0 < |x-a| < \delta$ nu P noemen, en de uitspraak $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ nu Q noemen, dan staat er in onze formule nu $\sim (P \Rightarrow Q)$ hiervan hebben we bij onderdeel (a) bewezen dat dit equivalent is met $P \wedge \sim Q$. Dus de volgende zin is equivalent met degene die we al hadden:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta \wedge \sim (|f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

We zien ook dat $\sim (|f(x) - f(a)| < \epsilon) \Leftrightarrow |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$. Dit geeft de volgende equivalente zin:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

In deze zin staat het teken $\sim$ niet meer, dus dit is ons eindantwoord.

(3a) Deze uitspraak is waar.

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ hebben we dat $n|n$, want $n = 1 \cdot n$, dus ook dat nRn. Dus de relatie is reflexief.

(3b) Deze uitspraak is onwaar.

Als we $m = 1$ en $n = 2$ kiezen, hebben we dat mRn, want $1|2$, maar we hebben niet dat nRm, want het is niet zo dat $2|1$. Dus de relatie is niet symmetrisch.

(3c) Deze uitspraak is waar.

Stel dat we hebben dat lRm en mRn voor zekere natuurlijke getallen l, m en n. Dan hebben we dus dat $m = kl$ en $n = jm$, voor bepaalde $k, j \in \mathbb{Z}$. Dit geeft ons dus dat $n = jkl$. Dus kiezen we $r = jk$, dan zien we dat $n = rl$, dus we hebben dat $l|n$. Dus we hebben ook dat lRn. Dus de relatie is transitief.

(3d) Deze uitspraak is onwaar.

Aangezien de relatie niet symmetrisch is, is het dus ook geen equivalentierelatie.

(3e) Deze uitspraak is waar.

Stel dat we dus $m, n \in \mathbb{N}$ hebben zodat mRn en nRm. Dus dan hebben we dat $m|n$ en $n|m$. Dus er zijn gehele getallen k en l zodat $m = kn$ en $n = lm$. Substitutie geeft ons nu dat $m = klm$. Dit betekent dus dat $kl = 1$. Aangezien k en l positieve gehele getallen moeten zijn, kan dit alleen maar als geldt dat $k = 1$ en $l = 1$. Dus we hebben dat $m = kn$ ons geeft dat $m = n$.

(4a) We gebruiken dus het principe van volledige inductie.

We bewijzen eerst de inductiebasis. Voor $n = 2$ hebben we dat $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{2} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. En we hebben ook dat $\frac{n-1}{n+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Dus de uitspraak is waar voor $n = 2$.

Stel nu dat de uitspraak waar is voor een zekere $n \in \mathbb{N}$, dus dan hebben we dat $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n+1}$.

We kijken naar de uitspraak voor $n + 1$. We zien dat:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n-1}{n+1} = \frac{2+(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{2+n^2+n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}$$

Dus de uitspraak is ook waar voor $n + 1$. Dit bewijst dus de inductiestap.

Met het principe van volledige inductie is nu bewezen dat $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n+1}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

(4b) We bepalen eerst de limiet van de partiële sommen. We zien dat:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dus we verwachten dat de limiet van de som 1 is. We bewijzen dit nu met een ϵ, N-bewijs.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen $N = \max(1, \lceil \frac{2}{\epsilon} - 1 \rceil)$.

We hebben nu sowieso het volgende voor alle $n > N$:

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{n-1-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| < \left|\frac{2}{N+1}\right|$$

Stel nu dat $\epsilon \geq 1$, dan is $\frac{2}{\epsilon} - 1 < 1$, dus hebben we $N = 1$. In dat geval hebben we dat:

$$\left|\frac{2}{N+1}\right| = \left|\frac{2}{1+1}\right| = \left|\frac{2}{2}\right| = 1 \leq \epsilon$$

Stel nu dat $\epsilon > 1$, dan is $\frac{2}{\epsilon} - 1 > 1$, dus dan is $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} - 1 \rceil$. In dat geval hebben we dat:

$$\left|\frac{2}{N+1}\right| \leq \left|\frac{2}{\frac{2}{\epsilon} - 1 + 1}\right| = \left|\frac{2}{\frac{2}{\epsilon}}\right| = \epsilon$$

Dus in beide gevallen hebben we dat $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \left|\frac{2}{N+1}\right| \leq \epsilon$. Dus nu hebben we bewezen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$. Dus de rij convergeert, en wel naar de waarde 1.

(5a) Stel dat we twee punten $x, y \in [0, \infty)$ hebben zodat $f(x) = f(y)$, ofwel dat $\frac{1}{(2+x)^2} = \frac{1}{(2+y)^2}$. Dan hebben we ook dat $(2+x)^2 = (2+y)^2$. Aangezien we hebben dat zowel x als y groter is dan 0, hebben we dat $2+x$ en $2+y$ dat ook zijn, dus uit $(2+x)^2 = (2+y)^2$ volgt dan ook dat $2+x = 2+y$, omdat geen van beide termen negatief kan zijn. Dus we mogen concluderen dat f injectief is.

(5b) De functie f is echter niet bijectief. Dit kunnen we als volgt zien. We zien dat $f(0) = \frac{1}{4}$. Dus de grafiek van de functie zal moeten stijgen als deze het volledige interval $(0, 1)$ wil beslaan. We zien echter ook dat $f'(x) = -\frac{2}{2+x}$, en voor $x \in [0, \infty)$ zien we dus dat $f'(x) < 0$. Dus de grafiek van f is strikt dalend. Dit maakt het onmogelijk dat f surjectief is.

(5c) Als eerst laten we zien dat er een bijectie bestaat tussen $(0, \infty)$ en $(0, 1)$.

Bekijk de functie $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Dit is bijna dezelfde functie als f, alleen de 2 is vervangen door een 1.

We kunnen zien dat g injectief is op dezelfde manier als we hebben gezien dat f injectief is. We kunnen nu echter ook laten zien dat g surjectief is. Zij een $x \in (0, 1)$ gegeven. We laten zien dat er een $r \in (0, \infty)$ bestaat zodat $g(r) = x$. We kiezen $r = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$. Dan zien we dat:

$$g(r) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1)^2} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{x}})^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Dus g is surjectief, en daarmee is g ook een bijectie. We zien nu dus dat er een bijectie bestaat tussen $(0, 1)$ en $(0, \infty)$

Er bestaat ook een bijectie tussen $(0, \infty)$ en $[0, \infty)$. Bijvoorbeeld de functie $h(x) : (0, \infty) \to [0, \infty)$ gedefinieerd als volgt:

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{als } x \in \mathbb{N} \\ x & \text{als } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Dat h een bijectie is, is makkelijk te controleren. We mogen dus uit dit alles concluderen dat er een bijectie bestaat tussen $(0, 1)$ en $[0, \infty)$. Dit betekent dus dat ze dezelfde kardinaliteit hebben.

(6a) Stel dat $(x_1, y_1) \in C \times D$ en $(x_2, y_2) \in C \times D$. Dit houdt dus in dat $x_1 \in C$, $x_2 \in C$, $y_1 \in D$, en $y_2 \in D$. Aangezien $C \times D$ gedefinieerd is als $\{(c, d) | c \in C, d \in D\}$, moet dus ook wel gelden dat $(x_1, y_2) \in C \times D$ en $(x_2, y_1) \in C \times D$, aangezien we hebben gezien dat $x_1 \in C$ en $y_2 \in D$ en dat $x_2 \in C$, en $y_1 \in D$.

(6b) We gebruiken de hint en we stellen $F = \{a \in A \mid \exists b \in B \text{ met } (a, b) \in E\}$ en $G = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ met } (a, b) \in E\}$. Het volgt meteen dat $F \subseteq A$ en $G \subseteq B$.

We laten nu zien dat $E = F \times G$. We bewijzen beide inclusies en concluderen vervolgens dat de verzamelingen gelijk zijn.

Zij een element $(x_1, y_1) \in E$ gegeven. Per definitie volgt dan meteen dat $x_1 \in F$ en $x_2 \in G$, omdat het paar (x_1, x_2) nu eenmaalin E zit. Hieruit volgt dus dat $E \subset F \times G$.

Zij nu een element $(x_2, y_2) \in F \times G$ gegeven. Dit betekent dat $x_2 \in F$ en $y_2 \in G$. Dit houdt dan weer in dat er elementen $y_3 \in B$ en $x_3 \in A$ zijn zodat $(x_2, y_3) \in E$ en $(x_3, y_2) \in E$, per definitie van F en G. We namen echter aan dat E zo gekozen is, dat $(x_2, y_3) \in E$ en $(x_3, y_2) \in E$ impliceert dat $(x_2, y_2) \in E$ en $(x_3, y_2 3) \in E$. Dus in het bijzonder hebben we dat $(x_2, y_2) \in E$. Hieruit volgt dus dat $F \times G \subseteq E$.

We mogen nu dus concluderen dat $E = F \times G$. Dit bewijst het gevraagde.