Uitwerking hertentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

22 December 2015

(1a) Gegeven dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is, kunnen we een getal c construeren dat tussen een gegeven a en b ligt die rationaal zijn.

Dit doen we als volgt: aangezien we weten dat $\sqrt{2}$ irrationaal is, weten we ook dat $\frac{1}{\sqrt{2}}$ een irrationaal getal is. Aangezien $\sqrt{2} > 1$, weten we dat $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Nu kunnen we dit interval een beetje opschalen, zodat de 0 verandert in a en de 1 verandert in b. De eerste stap is om alle drie de delen van de ongelijkheid te vermenigvuldigen met $b-a$. Dit geeft $0 < (b-a)/\sqrt{2} < b-a$. Nu kunnen we ook bij alle drie de delen a optellen en dat geeft dan dat $a < (b-a)/\sqrt{2} + a < b$.

We weten dat een rationaal gedeeld door een irrationaal getal weer irrationaal is, en een irrationaal getal plus een rationaal getal is ook weer irrationaal dus $(b-a)/\sqrt{2} + a$ is een irrationaal getal.

Dus gegeven een a en een b die rationaal zijn, dan kiezen we $c = (b-a)/\sqrt{2} + a$ zodat c irrationaal is en $a < c < b$.

(1b) We weten dat $\sim \forall x \Leftrightarrow \exists x \sim$. Dus dit geeft de volgende reeks equivalenties:

$$\sim \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > a, \exists c \in \mathbb{R}, a < c < b \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \sim \forall b > a, \exists c \in \mathbb{R}, a < c < b \Leftrightarrow$$

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b > a, \sim \exists c \in \mathbb{R}, a < c < b \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \exists b > a, \forall c \in \mathbb{R}, \sim (a < c < b) \Leftrightarrow$$

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b > a, \forall c \in \mathbb{R}, (c \geq b) \wedge (c \leq a)$$

(2a) Deze uitspraak is juist. Bekijk bijvoorbeeld $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $s = \sqrt{2}$. Dan geldt dat zowel r als s irrationaal is, en $r \neq s$ en $\frac{r}{s} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Dus rRs.

(2b) Deze uitspraak is ook juist. Bekijk bijvoorbeeld $r = \sqrt{2}$ en $s = \sqrt{3}$. Dan geldt dat zowel r als s irrationaal is, en $r \neq s$ en $\frac{r}{s} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Dus $\sim (rRs)$.

(2c) Er geldt duidelijk dat $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$. Dus de relatie is reflexief.

(2d) Stel dat er x en y zijn zodat $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Dan weten we dat de inverse van deze breuk ook rationaal is. Met andere woorden $\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$. Dus de relatie is symmertrisch.

(2e) Stel nu dat er x, y en z zijn zodat $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ en $\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$. Dan weten we ook dat hun product rationaal is, dus $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \in \mathbb{Q}$. Dus de relatie is transitief.

(2f) Aangezien de relatie zowel relexief, symmetrisch als transitief is, mogen we concluderen dat de relatie een equivalentierelatie is.

(3a) We kunnen de term $a \equiv b \mod n$ omschrijven naar $a = kn + b$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}$. Op dezelfde manier kunnen we ook zeggen dat $c = ln + d$ voor een zekere $l \in \mathbb{Z}$.

Hieruit kunnen we het volgende afleiden:

$$ac = (kn + b)(ln + d) = kln^2 + bln + dkn + bd = (kln + bl + dk)n + bd$$

Dus voor $s = kln + bl + dk$ geldt dus dat $ac = sn + bd$. Dus er geldt dat $ac \equiv bd \mod n$.

(3b) We kijken naar $a^2 - b^2$. We weten dat $a - b = kn$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}$. Dus we kunnen zeggen dat

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (a + b)kn = k(a + b)n$$

Dus voor $l = k(a + b)$ geldt dat $a^2 - b^2 = ln$. Dus $a^2 = b^2 \mod n$.

(3c) We gaan te werk met inductie. Voor $k = 0$ en $k = 1$ is de uitspraak triviaal. Voor $k = 2$ hebben we bij onderdeel b zojuist bewezen dat de uitspraak klopt.

Stel nu dat de uitspraak geldt voor een zekere $k \in \mathbb{N}$. We zullen nu bewijzen dat de uitspraak geldt voor $k+1$. Aangezien we weten dat $a \equiv b \mod n$, want dat is gegeven, en dat $a^k \equiv b^k \mod n$ uit de inductiestap kunnen we onderdeel a gebruiken om te concluderen dat $a^k \cdot a \equiv b^k \cdot b \mod n$; dat wil zeggen $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \mod n$. Daarmee is de inductiestap ook bewezen.

Dus nu is met het principe van inductie bewezen dat $a^k \equiv b^k \mod n$.

(4a) De functie f is niet injectief. Er geldt bijvoorbeeld dat $f(-1) = 1 = f(1)$, maar $1 \neq -1$.

De functie is wel surjectief. Dit laten we als volgt zien: gegeven een $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. We laten zien dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(x) = s$. Deze x is, niet geheel verrassend, $\sqrt{s}$. Aangezien $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is de wortel van s goed gedefinieerd, dus $\sqrt{(s)} \in \mathbb{R}$ en $f(x) = f(\sqrt{s}) = (\sqrt{s})^2 = s$. Dus f is surjectief.

Aangezien f niet injectief is, is f ook niet bijectief.

(4b) De functie g is injectief. Stel dat $g(x) = g(y)$, dus $x^2 = y^2$, met $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dan volgt na worteltrekken dat $x = \pm y$, maar aangezien x en y non-negatief zijn, moet wel gelden dat $x = y$, anders zou x negatief zijn. Dus de functie is injectief.

De functie is ook surjectief. Dit zien we op eenzelfde manier als bij onderdeel a: gegeven een $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. We laten zien dat er een $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat zodat $g(x) = t$. Deze x is, wederom niet geheel verrassend, $\sqrt{t}$. Aangezien $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is de wortel van t goed gedefinieerd en groter of gelijk aan 0, dus $\sqrt{(t)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $g(x) = f(\sqrt{t}) = (\sqrt{t})^2 = t$. Dus g is surjectief.

Aangezien g zowel injectief als surjectief is, is g ook bijectief.

(4c) De functie is niet injectief. Er geldt bijvoorbeeld dat $k(-1) = 1 = k(1)$, maar $1 \neq -1$.

De functie is ook niet surjectief. Er is bijvoorbeeld geen enkele $r \in \mathbb{Q}$ zodat $k(r) = 2$.

Aangezien k niet injectief en niet surjectief is, is k al zeker niet injectief.

(4c) De functie s is injectief. Stel dat $s(x) = s(y)$, dus $s^2 = s^2$, met $x, y \in \mathbb{Q}$. Dan volgt na worteltrekken dat $x = \pm y$, maar aangezien x en y non-negatief zijn, moet wel gelden dat $x = y$, anders zou x negatief zijn. Dus de functie is injectief.

De functie is echter niet surjectief. Er is bijvoorbeeld geen enkele $r \in \mathbb{Q}$ zodat $s(r) = 2$.

Aangezien s niet surjectief is, is s niet bijectief.

(5a) We gebruiken volledige inductie. We bekijken eerst de inductiebasis. Voor $n = 1$ geldt dat:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{2}{9 + 3 - 2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 2}$$

Dus de uitspraak klopt voor $n = 1$.

Stel nu dat de uitspraak is gegeven voor een zekere n. We bewijzen nu dat de uitspraak ook geldt voor $n + 1$. Eerst stellen we het volgende:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{2}{9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2}$$

Vanwege de inductiehypothese weten we dat deze laatste som gelijk is aan $\frac{n}{3n+2}$.

Dus we kunnen zeggen dat:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{2}{9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2} + \frac{n}{3n+2} = \frac{2}{9n^2 + 18n + 9 + 3n + 3 - 2} + \frac{n}{3n+2} =$$

$$\frac{2}{9n^2 + 21n + 10} + \frac{n}{3n+2} = \frac{2}{(3n+5)(3n+2)} + \frac{n}{3n+2} = \frac{2}{(3n+5)(3n+2)} + \frac{(3n+5)n}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$\frac{2 + (3n+5)n}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{2 + (3n+5)n}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{(3n+2)(n+1)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$\frac{n+1}{3n+5} = \frac{n+1}{3(n+1)+2}$$

Dus uit deze lange afleiding volgt dat het gevraagde ook geldt voor $n + 1$ gegeven dat het voor n geldt. Dus via het principe van inductie is nu het gevraagde bewezen.

(5b) Om de limiet van de som te bepalen, kijken we naar de limiet van de partiële sommen. We kunnen namelijk zelf beredeneren dat:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{3n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$

We geven nu ook een formeel ϵ, N-bewijs.

Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. Kies N zo dat $N = \lceil (\frac{2}{9\epsilon} - \frac{2}{3}) \rceil$. Dan geldt het volgende voor alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{n}{3n+2}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n}{3n+2}-\frac{n+\frac{2}{3}}{3(n+\frac{2}{3})}\right| = \left|\frac{n}{3n+2}-\frac{n+\frac{2}{3}}{3n+2}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3}}{3n+2}\right| = \left|\frac{2}{9n+6}\right| \leq$$

$$\left|\frac{2}{9N+6}\right| \leq \left|\frac{2}{9(\frac{2}{9\epsilon}-\frac{2}{3})+6}\right| = \left|\frac{2}{\frac{2}{\epsilon}-6+6}\right| = \left|\frac{2}{\frac{2}{\epsilon}}\right| = \epsilon$$

Dus we hebben nu een N gevonden voor iedere $\epsilon > 0$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $\left|\frac{n}{3n+2}-\frac{1}{3}\right| < \epsilon$. Dus de partiële sommen convergeren naar $\frac{1}{3}$, dus de reeks zelf convergeert ook naar $\frac{1}{3}$.

(6a) Voordat we beginnen met het daadwerkelijke bewijs, merken we op dat geldt dat $|\sin(\frac{1}{x})| < 1$, dus er geldt ook dat $|\sin^2(\frac{1}{x})| < 1$. Op eenzelfde manier weten we ook dat $|\cos(\frac{1}{x})| < 1$.

Zij nu een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen nu $\delta = \sqrt[3]{\frac{\epsilon}{2}}$. Dan geldt nu voor alle x waarvoor geldt dat $0 < |x| < \delta$ dat:

$$|f(x)-f(0)| = \left|x^3\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right| = |x^3|\cdot\left|\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq$$

$$|x|^3\cdot\left(\left|\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\right) \leq |x|^3\cdot(1+1) = 2|x|^3 < 2\delta^3 < 2\left(\sqrt[3]{\frac{\epsilon}{2}}\right)^3 = 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dus we hebben bewezen dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $|f(x)-f(0)| < \epsilon$ wanneer $|x| < \delta$. Dus de functie f is continu in het punt $x = 0$.

(6b) We gaan vrijwel hetzelfde te werk als hierboven. Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen nu $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$. Aangezien de functie f in het punt $x = 0$ gelijk is aan de nulfunctie, moeten we de afgeleide van f in het punt $x = 0$ ook behandelen als de afgeleide van de nulfunctie in het punt $x = 0$. Dus we stellen dat $f'(0) = 0$. Dit geeft de volgende berekening voor alle x zodat $0 < |x| < \delta$.:

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f'(0)\right| = \left|\frac{x^3\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}\right| = \left|\frac{x^3}{x}\right|\cdot\left|\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right|$$

$$\leq |x^2|\cdot(1+1) = 2|x|^2 < 2\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\right)^2 = 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dus zo hebben we bewezen dat voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f'(0)\right| < \epsilon$ als $0 < |x| < \delta$. Dus zo hebben we bewezen dat f differentieerbaar is in het punt $x = 0$.