Wat is Wiskunde Exam B, 18/01/2010, English

Voor de Nederlandse tekst van dit tentamen zie ommezijde.

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper
- On each sheet of paper you hand in write your name and student number
- Each problem counts for 20 points, leading to a maximum of 100 points
- Do not provide just final answers. Prove and motivate your arguments!
- The use of computer, calculator, lecture notes, or books is not allowed

Problem A) Consider the real valued function $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ and let $A \subseteq \mathbb{R}$ be the largest subset of the real numbers on which the function is well-defined.

(1) Find the set A.
(2) Let B be the image of f. Find B.
(3) Prove that the function $f : A \to B$ is invertible and find the inverse $f^{-1} : B \to A$.

Problem B) (new sheet!)

(1) State (without proof) the Schroeder-Bernstein Theorem.
(2) Prove that $|[-1, 1]| = |(-1, 1)|$.
(3) Prove that the set T of all real numbers with a terminating decimal expansion (that is from some point on in the decimal expansion all digits are 0) is infinite countable.

Problem C) (new sheet!)

(1) Let $d = gcd(99, 1005)$. Use the Euclidean Algorithm to find d and write d as $x \cdot 1005 + y \cdot 99$ where x and y are integers.
(2) Let a, b be two positive natural numbers and such that $gcd(a, b) = 1$. Prove that $gcd(a^2, b) = 1$.

Problem D) (new sheet)

(1) Prove that if ψ and φ are isomorphisms from $(\mathbb{Z}_4, +)$ to $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ such that $\psi([1]) = \varphi([1])$ then $\psi = \varphi$.
(2) Prove that there are at most 3 isomorphisms $\psi : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$. (Hint: use part 1.)
(3) Find all subgroups of the group $(\mathbb{Z}_4, +)$. (Prove your answer is correct!)

Problem E) (new sheet!) For each of the following statements decide if it is true or false. Give a short argument to support your answer.

(1) Let A be a set and $f : A \to A$ and $g : A \to A$ be functions. If $g \circ f = f \circ g$ then at least one of f or g must be injective.
(2) There exists a set X such that $|P(X)| = |P(P(X))|$.
(3) Let a, b be two positive natural numbers. If $gcd(a, b) = 2$ then $gcd(a^2, b) = 2$.
(4) Let G be a group with binary operation $\star$ and unit e. If for some element $g \in G$ holds $g \star g = e$ then for all $g \in G$ holds $g \star g = e$.

Wat is Wiskunde deeltentamen A, 2/11/2009, Nederlands

For the English text of this exam see the back of this page.

- Maak elk van de vijf opgaven op een apart blad papier.
- Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Elk van de vijf opgaven telt voor 20 punten.
- Geef niet alleen eindantwoorden, maar laat ook duidelijk zien hoe je tot je antwoord komt.
- Gebruik van een computer, rekenmachine, aantekeningen of boeken tijdens dit tentamen is niet toegestaan

Opgave A) Beschouw de reëelwaardige functie $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ en zij $A \subset \mathbb{R}$ de grootste deelverzameling van de reële getallen waarop de functie f goed gedefinieerd is.

(1) Bepaal A.
(2) Zij B het bereik van f. Bepaal B.
(3) Bewijs dat de functie $f\colon A \to B$ bijectief is en geef de inverse $f^{-1}\colon B \to A$.

Opgave B) (apart blad!)

(1) Schrijf de stelling van Schroeder–Bernstein op. (Zonder bewijs.)
(2) Bewijs dat $|[-1,1]| = |(-1,1)|$.
(3) Bewijs dat de verzameling T van reële getallen met eindige decimale ontwikkelingen (d.w.z. dat de decimale ontwikkeling vanaf een bepaald punt alleen nog maar uit nullen bestaat) aftelbaar oneindig is.

Opgave C) (apart blad!)

(1) Zij $d = ggd(99, 1005)$. Bepaal d met behulp van het Euclidisch Algoritme en schrijf d in de vorm $x \cdot 1005 + y \cdot 99$ met x en y gehele getallen.
(2) Gegeven zijn twee positieve gehele getallen a en b met de eigenschap dat $ggd(a,b) = 1$. Bewijs dat $ggd(a^2, b) = 1$.

Opgave D) (apart blad!)

(1) Stel dat ϕ and ψ twee isomorfismen zijn van $(\mathbb{Z}_4, +)$ naar $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ met $\phi([1]) = \psi([1])$. Bewijs dat $\phi = \psi$.
(2) Bewijs dat er hooguit 3 verschillende isomorfismen $\psi\colon (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ bestaan. (Hint: gebruik deel (1).)
(3) Bepaal alle ondergroepen van $(\mathbb{Z}_4, +)$. (En bewijs dat je antwoord klopt!)

Opgave E) (apart blad!) Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar? Geef voor elk van je antwoorden een kort argument.

(1) Zij A een verzameling en laten $f\colon A \to A$ en $g\colon A \to A$ functies zijn. Als $g \circ f = f \circ g$ dan is tenminste één van de functies f en g injectief.
(2) Er bestaat een verzameling X zodat $|P(X)| = |P(P(X))|$.
(3) Gegeven zijn twee positieve gehele getallen a en b. Als $ggd(a,b) = 2$, dan is $ggd(a^2, b) = 2$.
(4) Zij G een groep met bewerking $\star$ en eenheidselement e. Als er een element $g \in G$ is met de eigenschap dat $g \star g = e$, dan geldt voor iedere $g \in G$ dat $g \star g = e$.