Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Donderdag 10 november 2016, 9:00 - 12:00

Docenten: *Barbara van den Berg & Carel Faber & Arjen Baarsma & Ralph Klaasse & Viktor Blåsjö & Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Zij P en Q beweringen. Bewijs door middel van een waarheidstabel dat

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$$

een tautologie is.

(b). (*5 punten*) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $n \equiv 1 \pmod 2$ dan en slechts dan als $(n+2)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4$.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Definieer de verzamelingen $R = \{1, 2\}$, $S = \{2, 3\}$ en $T = \{3, 4\}$. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

(a). (*3 punten*) $\forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \forall t \in T,\ r + s \leq t$.

(b). (*3 punten*) $\exists r \in R,\ \forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t$.

(c). (*4 punten*) $\sim (\forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t)$.
(Hint: herschrijf de bewering eerst zodat er geen $\sim$ meer in voorkomt.)

Z.O.Z.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

In deze opgave bestuderen we de verzameling $S = \{\, p+q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\,\}$. Je mag gebruikmaken van het feit dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. In deze opgave zijn p, q, r en s telkens rationale getallen.

(a). (*2 punten*) Bewijs dat $p + q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ als $q \neq 0$.

(b). (*2 punten*) Bewijs dat $p + q\sqrt{2} = 0$ dan en slechts dan als $p = 0$ en $q = 0$.

(c). (*2 punten*) Bewijs dat $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ dan en slechts dan als $p = r$ en $q = s$.

Laat $f \colon \mathbb{Q}^2 \to S$ de functie zijn gedefinieerd door $f(p, q) = p + q\sqrt{2}$, waarbij $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

(d). (*2 punten*) Bewijs dat de functie f bijectief is.

(e). (*2 punten*) Is de verzameling S aftelbaar oneindig?
(Bewijs je bewering. Je mag gebruiken dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar oneindig is.)

Opgave 4 (nieuw vel papier)

We willen aantonen dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ convergeert.

(a). (*5 punten*) Bewijs eerst met behulp van volledige inductie voor alle $n \in \mathbb{N}$ de volgende formule voor de partiële sommen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b). (*5 punten*) Toon met een ε, N-bewijs aan dat de reeks convergeert.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Laat $f \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ de functie zijn gedefinieerd door:

$$f([a]_6) = ([a]_2, [a]_3),$$

waarbij $[a]_n$ de congruentieklasse van het getal a in de verzameling $\mathbb{Z}_n$ aanduidt.

(a). (*3 punten*) Laat zien dat de functie f welgedefinieerd is.

(b). (*2 punten*) Benoem alle elementen van $\mathbb{Z}_6$.

(c). (*2 punten*) Benoem alle elementen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

(d). (*3 punten*) Is de functie f bijectief? (Bewijs je bewering).

Zie volgend blad voor opgave 6.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Voor twee verzamelingen X en Y definiëren we het "symmetrische verschil" $X \ominus Y$ als de verzameling

$$X \ominus Y = (X \cup Y) - (X \cap Y).$$

Merk op dat $X \ominus Y = Y \ominus X$. Je mag dit gebruiken zonder bewijs.

(a). (*4 punten*) Laat zien dat voor alle verzamelingen X en Y geldt dat

$$X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$

(b). (*3 punten*) Bewijs dat

$$A \ominus C \subseteq (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$$

voor iedere drie verzamelingen A, B en C.
(Hint: behandel de gevallen $x \in B$ en $x \notin B$ apart.)

Definieer een relatie R op de machtsverzameling $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als volgt: voor $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt $A \; R \; B$ dan en slechts dan als $A \ominus B$ een eindige verzameling is.

(c). (*3 punten*) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Woordenlijst Nederlands–Engels

Aftelbaar oneindig	Denumerable
Bewering	Statement
Bewijs of weerleg	Prove or disprove
Bijectie	Bijection
Congruentieklasse/restklasse	Congruence class/residue class
Convergeren	Converge
Dan en slechts dan als	If and only if
Equivalentierelatie	Equivalence relation
Functie	Function
Machtsverzameling	Power set
Partiële som	Partial sum
Rationaal getal	Rational number
Reeks	Series
Tautologie	Tautology
Verzameling	Set
Volledige inductie	Mathematical induction
Waarheidstabel	Truth table
Welgedefinieerd	Well-defined