Uitwerkingen Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101) Donderdag 10 november 2016, 9:00 - 12:00

Docenten: *Barbara van den Berg & Carel Faber & Arjen Baarsma & Ralph Klaasse & Viktor Blåsjö & Guido Terra-Bleeker*

Opgave 1

(a). (*5 punten*) Zij P en Q beweringen. Bewijs door middel van een waarheidstabel dat

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$$

een tautologie is.

(b). (*5 punten*) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $n \equiv 1 \pmod 2$ dan en slechts dan als $(n+2)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4$.

Uitwerking.

(a) We geven de waarheidstabel van $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

We zien dat voor alle waarheidswaarden van P en Q de bewering

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$$

waar is, dus is de bewering een tautologie.

(b) We bewijzen de volgende twee beweringen:

(1) voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow (n+2)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4$, en

(2) voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $(n+2)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 2$.

Uit beide implicaties volgt de equivalentie.

We geven een direct bewijs van (1): Laat $n \in \mathbb{N}$ willekeurig zijn en veronderstel dat $n \equiv 1 \pmod 2$. Dan geldt dat $2|n-1$, dus er is een $k \in \mathbb{Z}$ zodat $2k = n-1$, oftewel $n = 2k+1$. Hieruit volgt dat:

$$(n+2)^2+3 = (2k+3)^2+3 = 4k^2+12k+9+3 = 4k^2+12k+12 = 4(k^2+3k+3) \equiv 0 \pmod 4$$

want $k^2 + 3k + 3$ is geheel.

We geven een bewijs van (2) door contrapositie: Laat $n \in \mathbb{N}$ willekeurig zijn en veronderstel dat $n \not\equiv 1 \pmod 2$. Dan is $n \equiv 0 \pmod 2$ want $\mathbb{Z}_2$ heeft twee elementen, en dus geldt dat $2|n$, oftewel er is een $k \in \mathbb{Z}$ zodat $2k = n$. Hieruit volgt dat:

$$(n+2)^2 + 3 = (2k+2)^2 + 3 = (2(k+1))^2 + 3 = 4(k+1)^2 + 3 \equiv 3 \pmod 4$$

want $(k+1)^2$ is geheel. We zien dat $n \not\equiv 1 \pmod 2$ impliceert dat $(n+2)^2 + 3 \not\equiv 0 \pmod 4$, wat logisch equivalent is aan $(n+2)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4$ impliceert dat $n \equiv 1 \pmod 2$ (door contrapositie, zie onderdeel (a)).

Opgave 2

Definieer de verzamelingen $R = \{1, 2\}$, $S = \{2, 3\}$ en $T = \{3, 4\}$. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

(a). (*3 punten*) $\forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \forall t \in T,\ r + s \leq t$.

(b). (*3 punten*) $\exists r \in R,\ \forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t$.

(c). (*4 punten*) $\sim (\forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t)$.
(Hint: herschrijf de bewering eerst zodat er geen $\sim$ meer in voorkomt.)

Uitwerking.

(a) De bewering is dat de som van een willekeurig element van R en een willekeurig element van S kleiner is dan of gelijk aan een willekeurig element van T. Equivalent hiermee is dat de som van het grootste element van R en het grootste element van S kleiner is dan of gelijk aan het kleinste element van T. Deze bewering is duidelijk niet waar: voor $r = 2$ en $s = 3$ en $t = 3$ geldt niet dat $r + s \leq t$ (want $5 > 3$).

(b) De bewering is dat er een $r \in R$ bestaat zodat er voor elke $s \in S$ een $t \in T$ bestaat met $r + s \leq t$. Om te controleren of deze bewering waar is, is het duidelijk een goed idee om r zo klein mogelijk te nemen. We nemen dus $r = 1$. Voor alle $s \in S$ geldt $s \leq 3$, dus $r + s \leq 4$. In het bijzonder bestaat er voor elke $s \in S$ een $t \in T$ met $r + s \leq t$, namelijk $t = 4$. De bewering is dus waar.

(c) Laten we de hint volgen. De ontkenning van $\forall r \in R,\ P(r)$ is $\exists r \in R,\ \sim (P(r))$ en de ontkenning van $\exists t \in T,\ Q(t)$ is $\forall t \in T,\ \sim (Q(t))$. Dus

$$\sim (\forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t)$$

is

$$\exists r \in R,\ \sim (\forall s \in S,\ \exists t \in T,\ r + s \leq t),$$

wat weer hetzelfde is als

$$\exists r \in R,\ \exists s \in S,\ \sim (\exists t \in T,\ r + s \leq t),$$

wat gelijk is aan

$$\exists r \in R,\ \exists s \in S,\ \forall t \in T,\ \sim (r + s \leq t),$$

wat tenslotte gelijk is aan

$$\exists r \in R,\ \exists s \in S,\ \forall t \in T,\ r + s > t.$$

Om te controleren of deze bewering waar is, is het duidelijk optimaal om r en s zo groot mogelijk te nemen, dus $r = 2$ en $s = 3$, zodat $r + s = 5$. Voor alle $t \in T$ geldt nu inderdaad $r + s > t$, want $t \leq 4$, dus $t < 5$. De bewering is dus waar.

Opgave 3

Definitie: $S = \{\, p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q} \,\}$.

(a). **Te bewijzen:** Voor $p, q \in \mathbb{Q}$ geldt $p + q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ als $q \neq 0$.

Bewijs: We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat de bewering onwaar is en zij $p, q \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $q \neq 0$ en $p + q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Noem $r = p + q\sqrt{2}$, dan geldt $r \in \mathbb{Q}$ en $\sqrt{2} = \frac{r-p}{q}$ (waarbij we gebruiken dat $q \neq 0$). Kies nu $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ met $b, d, f \neq 0$ zodanig dat $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$ en $r = \frac{e}{f}$, dan volgt hieruit dat

$$\sqrt{2} = \frac{\frac{e}{f} - \frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{d(b\,e - a\,f)}{b\,c\,f}.$$

Aangezien $d(b\,e - a\,f) \in \mathbb{Z}$ en $b\,c\,f \in \mathbb{Z} - \{0\}$ leiden we hieruit af dat $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, wat in tegenspraak is met het bekende gegeven dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

We concluderen dat voor alle rationale getallen p en q waarvoor $q \neq 0$ moet gelden dat $p + q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Q.E.D.

Een korter argument is mogelijk. Tijdens het college hebben we gezien dat het verschil van twee rationale getallen opnieuw een rationaal getal is, en dat hetzelfde geldt voor het quotiënt (mits de noemer ongelijk aan nul is). Door deze feiten te combineren kan direct worden geconcludeerd dat $\frac{r-p}{q} \in \mathbb{Q}$.

(b). **Te bewijzen:** Voor $p, q \in \mathbb{Q}$ geldt $p + q\sqrt{2} = 0$ dan en slechts dan als $p = 0$ en $q = 0$.

Bewijs: Dat $p + q\sqrt{2} = 0$ als $p = 0$ en $q = 0$ behoeft geen bewijs. We zullen ons dus concentreren op de omgekeerde implicatie: als $p + q\sqrt{2} = 0$ dan geldt $p = 0$ en $q = 0$.

Stel dat $p, q \in \mathbb{Q}$ zodanig zijn dat $p + q\sqrt{2} = 0$. Aangezien nu ook geldt dat $p + q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ volgt uit (de contrapositie van) onderdeel (a) dat $q = 0$. De vergelijking $p + q\sqrt{2} = 0$ reduceert nu tot $p = 0$, dus uit de aanname dat $p + q\sqrt{2} = 0$ volgt zowel $p = 0$ als $q = 0$. Q.E.D.

Er zijn andere argumenten mogelijk. Deze komen meestal neer op het gedeeltelijk opnieuw bewijzen van de bewering uit onderdeel (a).

(c). **Te bewijzen:** Voor $p, q \in \mathbb{Q}$ geldt $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ dan en slechts dan als $p = r$ en $q = s$.

Bewijs: Dat $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ wanneer $p = r$ en $q = s$ behoeft geen bewijs, dus we concentreren ons op de omgekeerde implicatie.

Zij $p, q \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$. Door het linker- en het rechterlid van deze vergelijking van elkaar af te trekken leiden we hieruit af dat ook moet gelden dat $(p - r) + (q - s)\sqrt{2} = 0$. Omdat $p - r$ en $q - s$ rationale getallen zijn volgt nu uit onderdeel (b) dat $p - r = 0$ en $q - s = 0$, oftewel dat $p = r$ en $q = s$. Q.E.D.

Definitie: De functie $f : \mathbb{Q}^2 \to S$ wordt gegeven door $f(p, q) = p + q\sqrt{2}$, waarbij $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

(d). **Te bewijzen:** De functie f is bijectief.

Bewijs: We kunnen bijectiviteit van f bewijzen door aan te tonen dat f zowel *injectief* als *surjectief* is.

Injectiviteit: Zij $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}^2$ paren van rationale getallen waarvoor geldt dat $f(a,b) = f(c,d)$. Per aanname geldt nu dat $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, dus uit onderdeel (c) volgt dat $a = c$ en $b = d$, oftewel dat $(a,b) = (c,d)$. De functie f is dus injectief.

Surjectiviteit: Zij $y \in S$ willekeurig, dan bestaan er rationale getallen p en q zodat $y = p + q\sqrt{2}$ en dus $y = f(x)$ voor $x = (p,q) \in \mathbb{Q}^2$. We zien dat ieder element van S ook in het beeld van f zit, dus f is surjectief. Q.E.D.

(e). **Te bewijzen:** De verzameling S is aftelbaar oneindig.

Bewijs: We hebben in onderdeel (d) aangetoond dat f een bijectieve functie van $\mathbb{Q}^2$ naar S is. De verzamelingen S en $\mathbb{Q}^2$ hebben dus dezelfde kardinaliteit.

Het product van twee oneindig aftelbare verzamelingen is aftelbaar oneindig en we weten al dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar oneindig is, dus ook $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ is aftelbaar oneindig. Aangezien we net hebben beargumenteerd dat S en $\mathbb{Q}^2$ dezelfde kardinaliteit hebben volgt hieruit dat S aftelbaar oneindig is. Q.E.D.

Opgave 4

We willen aantonen dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ convergeert.

(a). (*5 punten*) Bewijs eerst met behulp van volledige inductie voor alle $n \in \mathbb{N}$ de volgende formule voor de partiële sommen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b). (*5 punten*) Toon met een ε, N-bewijs aan dat de reeks convergeert.

Uitwerking.

(a) Zij $P(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ voor $n \in \mathbb{N}$. We bewijzen dat $P(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$ met behulp van volledige inductie. Voor $n = 1$ geldt $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, dus $P(1)$ is waar. Zij nu $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $P(m)$ waar is. Dan volgt dat $\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(m+1)!}$. Hierdoor geldt dat $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{m+1}{(m+2)!} = 1 - \frac{1}{(m+1)!} + \frac{m+1}{(m+2)!} = 1 - \frac{m+2}{(m+1)!(m+2)} + \frac{m+1}{(m+2)!} = 1 - \frac{(m+2)-(m+1)}{(m+2)!} = 1 - \frac{1}{(m+2)!}$, gebruikmakende van het feit dat $(m+2)! = (m+1)!(m+2)$. We concluderen dat ook $P(m+1)$ waar is. Uit het feit dat $P(1)$ waar is en dat de implicatie $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$ waar is voor alle $m \in \mathbb{N}$ volgt volgens het principe van volledige inductie dat $P(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Definieer $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Per definitie convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ als de rij $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. Merk op dat uit deel a) volgt dat $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We laten nu zien dat $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig en definieer $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Omdat $\varepsilon > 0$ en dus $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ volgt dat $N \geq 1$ en dus $N \in \mathbb{N}$. Zij nu $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $n > N$ willekeurig. Omdat $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ volgt dan dat $n > \frac{1}{\varepsilon}$ en dus $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Merk verder op dat omdat $N \geq 1$, dat $n > 1$ en dus dat $(n+1)! > n! > n$. Nu volgt dat $|s_n - 1| = |(1 - \frac{1}{(n+1)!}) - 1| = |-\frac{1}{(n+1)!}| = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ en daarmee convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ met som gelijk aan 1.

Opgave 5

Laat $f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ de functie zijn gedefinieerd door:

$$f([a]_6) = ([a]_2, [a]_3),$$

waarbij $[a]_n$ de congruentieklasse van het getal a in de verzameling $\mathbb{Z}_n$ aanduidt.

(a). (*3 punten*) Laat zien dat de functie f welgedefinieerd is.

(b). (*2 punten*) Benoem alle elementen van $\mathbb{Z}_6$.

(c). (*2 punten*) Benoem alle elementen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

(d). (*3 punten*) Is de functie f bijectief? (Bewijs je bewering).

Uitwerking.

(a) $f([a]_6)$ is gedefinieerd in termen van een representatieve element a uit de congruentieklasse $[a]_6$. Om welgedefinieerd te zijn, moet $f([a]_6)$ onafhankelijk zijn van de keuze van het representatieve element a. Dat wil zeggen, als $[a]_6 = [b]_6$ dan moet $f([a]_6) = f([b]_6)$. Stel dus dat $[a]_6 = [b]_6$, dat wil zeggen $b = a + 6n$ waar n een geheel getal is. Wij zien dat $[a]_2 = [b]_2$ want

$$a + 6n \equiv a + 2 \cdot 3n \equiv a \mod 2$$

en $[a]_3 = [b]_3$ want

$$a + 6n \equiv a + 3 \cdot 2n \equiv a \mod 3$$

dus

$$f([a]_6) = ([a]_2, [a]_3) = ([b]_2, [b]_3) = f([b]_6).$$

De functie is dus welgedefinieerd.

(b) De elementen van $\mathbb{Z}_6$ zijn: $[0]_6$, $[1]_6$, $[2]_6$, $[3]_6$, $[4]_6$, $[5]_6$.

(c) De elementen van $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ zijn: $([0]_2, [0]_3)$, $([0]_2, [1]_3)$, $([0]_2, [2]_3)$, $([1]_2, [0]_3)$, $([1]_2, [1]_3)$, $([1]_2, [2]_3)$.

(d) Het domein van f bestaat uit de zes elementen die wij in (b) hebben benoemd. Deze elementen leveren de volgende waarden van f op:

$$\begin{aligned}
f([0]_6) &= ([0]_2, [0]_3) \\
f([1]_6) &= ([1]_2, [1]_3) \\
f([2]_6) &= ([2]_2, [2]_3) = ([0]_2, [2]_3) \\
f([3]_6) &= ([3]_2, [3]_3) = ([1]_2, [0]_3) \\
f([4]_6) &= ([4]_2, [4]_3) = ([0]_2, [1]_3) \\
f([5]_6) &= ([5]_2, [5]_3) = ([1]_2, [2]_3)
\end{aligned}$$

Wij zien dat geen twee elementen uit het domein tot dezelfde waarde van f leiden. De functie is dus injectief. Het codomein van f bestaat uit de zes elementen die wij in (c) hebben benoemd. Uit bovenstaande tabel zien wij dat elk element van het codomein bereikt wordt door f. De functie is dus surjectief. Omdat f injectief en surjectief is, is f bijectief.

Opgave 6

Definitie: Voor twee verzamelingen X en Y definiëren we $X \ominus Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$.

(a). **Te bewijzen:** $X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

Bewijs: We bewijzen dit twee kanten op, allereerst de inclusie van het linkerlid in het rechterlid, en vervolgens andersom:

$\subseteq$: Zij $x \in X \ominus Y$. Dan geldt dat $x \in X \cup Y$ en $x \notin X \cap Y$. Omdat $x \in X \cup Y$ is $x \in X$ of $x \in Y$, zeg (zonder beperking van algemeenheid, want anders verwissel je gewoon de naamgeving van X en Y) $x \in X$. Omdat $x \notin X \cap Y$ kan dan x geen element van Y zijn (omdat het anders in zowel X als Y en dus in $X \cap Y$ zou zitten). We weten nu dus dat $x \in X$ en $x \notin Y$, dus $x \in X - Y$. Daaruit volgt dan ook dat $x \in (X - Y) \cup (Y - X)$. Omdat dit geldt voor een willekeurige $x \in X \ominus Y$ hebben we nu dus bewezen dat $X \ominus Y \subseteq (X - Y) \cup (Y - X)$.

$\supseteq$: Zij nu $x \in (X - Y) \cup (Y - X)$. Dan geldt dat $x \in X - Y$ of $x \in Y - X$. Zonder beperking van algemeenheid (verwissel anders de naamgeving van X en Y) kunnen we aannemen dat $x \in X - Y$, oftewel $x \in X$ en $x \notin Y$. Uit het eerste volgt dat $x \in X \cup Y$, terwijl uit het tweede volgt dat $x \notin X \cap Y$. We concluderen derhalve dat $x \in (X \cup Y) - (X \cap Y) = X \ominus Y$. Omdat dit geldt voor een willekeurige $x \in (X - Y) \cup (Y - X)$ hebben we nu dus bewezen dat $(X - Y) \cup (Y - X) \subseteq X \ominus Y$.

Nu we hebben bewezen dat $X \ominus Y \subseteq (X - Y) \cup (Y - X)$ en $X \ominus Y \supseteq (X - Y) \cup (Y - X)$, concluderen we tenslotte dat $X \ominus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Q.E.D.

(b). **Te bewijzen:** $A \ominus C \subseteq (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$ voor elk drietal verzamelingen A, B en C.

Bewijs: Zij $x \in A \ominus C = (A - C) \cup (C - A)$, gebruikmakend van (a). Dan is dus $x \in A - C$ of $x \in C - A$. Zonder beperking van algemeenheid (verwissel anders de naamgeving van A en C) nemen we aan dat $x \in A - C$, oftewel $x \in A$ en $x \notin C$.

Vervolgens onderscheiden we twee gevallen, $x \in B$ of $x \notin B$:

- Als $x \in B$ dan is $x \in B$ en $x \notin C$, dus $x \in B - C$. Wederom gebruikmakend van (a) zien we dus dat $x \in C \ominus B = (C - B) \cup (B - C)$ in dit geval. Hieruit kunnen we nu dus ook concluderen dat $x \in (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$.
- Als $x \notin B$ dan is $x \in A$ en $x \notin B$, dus $x \in A - B$. In dit geval concluderen we hieruit dat, volgens (a), $x \in A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$. Opnieuw volgt hieruit ook dat $x \in (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$.

Voor elke willekeurige $x \in A \ominus C$ is één van de twee uitspraken $x \in B$ of $x \notin B$ waar, en in beide gevallen hebben we kunnen concluderen dat deze willekeurige $x \in A \ominus C$ ook element is van $(A \ominus B) \cup (C \ominus B)$. Daarmee hebben we nu dus bewezen dat $A \ominus C \subseteq (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$. Q.E.D.

Definitie: Voor verzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ geldt $A \mathrel{R} B$ dan en slechts dan als $A \ominus B$ eindig is.

(c). **Te bewijzen:** R is een equivalentierelatie.

Bewijs: We zullen achtereenvolgens laten zien dat R *reflexief*, *symmetrisch* en *transitief* is:

Reflexief: Zij $A \subseteq \mathbb{N}$ een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{N}$. Dan is $A - A = \emptyset$ en dus ook $A \ominus A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$, wederom gebruikmakend van (a). Dus $A \ominus A$ is zeker eindig. En dus geldt dat $A\ R\ A$.
We hebben nu dus laten zien dat voor elke willekeurige $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt dat $A\ R\ A$.

Symmetrisch: Stel dat $A\ R\ B$ voor een zeker tweetal deelverzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{N}$, oftewel $A \ominus B$ is eindig. Omdat $B \ominus A = A \ominus B$, is $B \ominus A$ dus ook eindig. En dus geldt dat $B\ R\ A$.
We hebben nu dus laten zien dat voor alle $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt dat $A\ R\ B \Rightarrow B\ R\ A$.

Transitief: Stel dat $A\ R\ B$ en $B\ R\ C$ voor een willekeurig drietal deelverzamelingen $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$. Dan is dus $A \ominus B$ eindig en $B \ominus C$ is eindig. En $C \ominus B = B \ominus C$ is dus ook eindig. De verzameling $(A \ominus B) \cup (C \ominus B)$ is dus een vereniging van twee eindige verzamelingen en derhalve zelf ook eindig. Elke deelverzameling van een eindige verzameling is weer eindig, dus volgens (b) is $A \ominus C \subseteq (A \ominus B) \cup (C \ominus B)$ ook eindig. En dus geldt dat $A\ R\ C$.
We hebben nu dus laten zien dat voor alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met $A\ R\ B$ en $B\ R\ C$, ook geldt dat $A\ R\ C$.

We hebben nu laten zien dat de relatie R reflexief, symmetrisch en transitief is, dus is het een equivalentierelatie. Q.E.D.