Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Donderdag 5 Januari 2017, 13:30 - 16:30

Docenten: *Barbara van den Berg & Carel Faber & Arjen Baarsma & Ralph Klaasse & Viktor Blåsjö & Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Laat P, Q en R beweringen zijn en ϕ de samengestelde bewering:

$$(P \Rightarrow (\sim Q \vee \sim R)) \wedge P \wedge (Q \vee R).$$

Ga na voor welke waarden van P, Q en R de bewering ϕ waar is.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Bewijs met volledige inductie dat $13 \cdot 6^n + 8 \cdot 13^n$ deelbaar is door 7 voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

De machtsverzameling van een verzameling A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A. De machtsverzameling wordt genoteerd met $\mathcal{P}(A)$. Laat A en B twee verzamelingen zijn. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

(a). ($2\frac{1}{2}$ *punten*) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ dan en slechts dan als $A = B$.

(b). ($2\frac{1}{2}$ *punten*) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \times B)$.

(c). ($2\frac{1}{2}$ *punten*) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(d). ($2\frac{1}{2}$ *punten*) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Zij $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Bepaal $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ en bewijs je antwoord met een ε, δ-bewijs.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Bewijs of weerleg:

(a). (*3 punten*) Als $A \subseteq B \subseteq C$ verzamelingen zijn, dan geldt: als B aftelbaar oneindig is, dan zijn A en C aftelbaar oneindig.

(b). (*4 punten*) Als $A \subseteq B \subseteq C$ verzamelingen zijn, dan geldt: als A en C aftelbaar oneindig zijn, dan is B aftelbaar oneindig.

(c). (*3 punten*) De verzameling $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is overaftelbaar.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

We noemen een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oneven* als $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Meetkundig betekent dit dat de grafiek van een oneven functie puntsymmetrisch is onder rotatie over 180 graden om de oorsprong.

Laat $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de verzameling van alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren een relatie R op $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ als volgt: voor twee functies $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ geldt $f\,R\,g$ dan en slechts dan als de verschilfunctie $g - f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oneven is.
Opmerking: de verschilfunctie is gedefinieerd door $(g - f)(x) := g(x) - f(x)$.

(a). (*4 punten*) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

We gebruiken de notatie $[f]$ voor de equivalentieklasse van de functie f. Beschouw nu de volgende functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + \sin(x) + \cos(x), \\ g(x) &= e^{-x} - x + \cos(x), \\ h(x) &= 0. \end{aligned}$$

(b). (*4 punten*) Laat zien dat $[f] = [g]$. (Je mag in je bewijs gebruiken dat $\sin(x)$ een oneven functie is.)

(c). (*2 punten*) Geef een meetkundige beschrijving van de equivalentieklasse $[h]$ van de functie h.

Woordenlijst Nederlands–Engels

Aftelbaar oneindig	Denumerable
Bewering	Statement
Bewijs of weerleg	Prove or disprove
Dan en slechts dan als	If and only if
Equivalentierelatie	Equivalence relation
Functie	Function
Machtsverzameling	Power set
Overaftelbaar	Uncountable
Verzameling	Set
Volledige inductie	Mathematical induction