Uitwerking hertentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

5 januari 2017

(1) We gebruiken een waarheidstabel. Dit ziet er als volgt uit:

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim R$	$\sim Q \vee \sim R$	$P \Rightarrow (\sim Q \vee \sim R)$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	ϕ
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Dus we zien dat ϕ waar is precies als zowel P geldt als precies een van Q en R.

(2) We gebruiken dus het principe van volledige inductie.

We laten eerst zien dat de uitspraak geldt voor $n = 0$. We zien dat $13 \cdot 6^0 + 8 \cdot 13^0 = 13 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 13 + 8 = 21$. Aangezien 21 deelbaar is door 7, geldt de uitspraal voor $n = 0$.

We nemen nu aan dat de formule klopt voor een zekere $n \in \mathbb{N}$. Dus we nemen aan dat voor deze n geldt dat $13 \cdot 6^n + 8 \cdot 13^n$ deelbaar is door 7, dus voor een zekere $l \in \mathbb{N}$ hebben we dat $13 \cdot 6^n + 8 \cdot 13^n = 7l$.

We kijken nu naar de uitspraak voor $n + 1$. We krijgen dat:

$$13 \cdot 6^{n+1} + 8 \cdot 13^{n+1} = 6 \cdot 13 \cdot 6^n + 13 \cdot 8 \cdot 13^n = 7 \cdot 13 \cdot 6^n - 13 \cdot 6^n + 14 \cdot 8 \cdot 13^n - 8 \cdot 13^n =$$

$$7 \cdot 13 \cdot 6^n + 14 \cdot 8 \cdot 13^n - (13 \cdot 6^n + 8 \cdot 13^n) = 7 \cdot 13 \cdot 6^n + 14 \cdot 8 \cdot 13^n - 7l = 7(13 \cdot 6^n + 2 \cdot 8 \cdot 13^n - l)$$

Dus kiezen we nu $k = 13 \cdot 6^n + 2 \cdot 8 \cdot 13^n - l$, dan hebben we dat $13 \cdot 6^{n+1} + 8 \cdot 13^{n+1} = 7k$. Dus $13 \cdot 6^{n+1} + 8 \cdot 13^{n+1}$ is deelbaar door 7, dus de stelling geldt ook voor $n + 1$.

Met het principe van volledige inductie is nu bewezen dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $13 \cdot 6^n + 8 \cdot 13^n$ deelbaar is door 7.

(3a) Deze uitspraak is waar.

Als we aannemen dat $A = B$, dan hebben we ook dat iedere deelverzameling van A ook een deelverzameling is van B en andersom, en daaruit volgt meteen dat $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

Stel nu dat $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. We kijken nu naar de singletons[1] van $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(B)$, die hetzelfde zijn, want $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Voor ieder element van A zit er een singleton in $\mathcal{P}(A)$ en voor ieder element van B zit er een singleton in $\mathcal{P}(B)$. Aangezien de singletons van $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(B)$ overeenkomen, volgt hier dus uit dat alle elementen van A en B overeenkomen, dus zijn A en B dezelfde verzamelingen.

(3b) Deze uitspraak is onwaar.

Dit kan al gezien worden door te kijken naar de structuur van de elementen van beide verzamelingen. We zien dat $A \times B$ bestaat uit geordende paren (a, b), dus $\mathcal{P}(A \times B)$ bestaat uit verzamelingen van geordende paren. Andersom zien we ook dat $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(B)$ beide bestaan uit verzamelingen van elementen, dus $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ bestaat uit geordende paren van verzamlingen, wat iets anders is dan verzamlingen van geordende paren. Dus de we zien duidelijk dat $\mathcal{P}(A \times B) \neq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

(3c) Deze uitspraak is waar.

Zij een element x van $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ gegeven. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $x \in \mathcal{P}(A)$. Het andere geval volgt op dezelfde manier. Aangezien $x \in \mathcal{P}(A)$, geldt dat x een deelverzameling is van A, dus ook zeker een deelverzamling is van $A \cup B$, aangezien $A \subseteq A \cup B$. Hieruit volgt dus direct dat $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Dus we mogen concluderen dat $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(3d) Deze uitspraak is onwaar, mits we niet hebben dat $A \subseteq B$ of $B \subseteq A$.

Zij nu twee zulke verzamlingen A en B gegeven. We kunnen zien dat de uitspraak niet waar is door een element $a \in A$ te kiezen en een element $b \in B$, zodat $a \notin B$ en $b \notin A$. Dit kan omdat geen van de twee een deelverzamling is van de ander. Als we dan kijken naar $\{a, b\}$, dan zien we dat $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, want $a \in A \cup B$ en $b \in A \cup B$. We zien echter ook dat $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A)$, want $b \notin A$, en $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(B)$, want $a \notin \mathcal{P}(B)$. Dus we hebben dat $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Dus we concluderen dat $\mathcal{P}(A \cup B) \nsubseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

4 We kijken eerst welke waarde f aanneemt in het punt $x = 1$. Invullen geeft:

$$f(1) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

We geven nu een ϵ-δ-bewijs dat f ook continu is in het punt $x = 1$.

We geven nu echter ook een ϵ, δ-bewijs. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen $\delta = \min(1, 2\epsilon)$.

We zien wanneer $|x - 1| < \delta$, dat $|x - 1| < 1$, dus $-1 < x - 1 < 1$ en $0 < x < 2$. Hieruit mogen we concluderen dat $|2x + 2| > 0 + 2 = 2$. Dit alles samenvoegen geeft:

$$\left|\frac{x+2}{x+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2x+4-3x-3}{2x+2}\right| = \left|\frac{-x+1}{2x+2}\right| = \frac{|x-1|}{|2x+2|} < \frac{\delta}{2} < \epsilon$$

Dus daarmee is bewezen dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $0 < |x + 1| < \delta$ impliceert dat $f(x) - f(1) < \epsilon$.

[1] Singletons zijn verzamlingen met maar 1 element.

(5a) Deze uitspraak is onwaar.

Bekijk bijvoorbeeld de verzamlingen $A = \{0\}$, $B = \mathbb{N}$ en $C\mathbb{R}$. Dan zien we duidelijk dat B aftelbaar oneindig is en dat $A \subseteq B \subseteq C$. Er geldt echter niet dat A of C aftelbaar oneindig is.

(5b) Deze uitspraak is waar.

Zij nu twee verzamelingen A en C gegeven zodat $|A| = |C| = |\mathbb{N}|$. Aangezien $A \subseteq B$, moet gelden dat $|A| \leq |B|$. We hebben ook dat $B \subseteq C$, dus $|B| \leq |C|$, maar aangezien $|A| = |C|$, geldt dus ook dat $|B| \leq |A|$. Dus we hebben dat $|B| \leq |A|$ en $|B| \geq |A|$. De stelling van Cantor-Schröder-Bernstein vertelt ons nu dat we mogen concluderen dat $|A| = |B|$. Dus $|B| = |\mathbb{N}|$. Dus B is aftelbaar oneindig.

(5c) Deze uitspraak is waar.

We weten dankzij het diagonaalargument van Cantor dat $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Verder is het makkelijk te zien dat $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ door middel van de volgende injectie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, 0)$. Dus hieruit mogen we concluderen dat $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ dus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is overaftelbaar.

(6a) We bewijzen de drie eigenschappen van een equivalentierelatie.

Voor iedere $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ geldt dat $f - f = 0$ en de functie 0 is zeker oneven. Dus we hebben dat fRf.

Stel nu dat fRg voor zekere functies $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dan geldt dus dat $g - f$ een oneven functie is. Dus $g(-x) - f(-x) = -(g(x) - f(x))$. Dan kunnen we ook kijken naar het volgende:

$$f(-x) - g(-x) = -(g(-x) - f(-x)) = -(-(g(x) - f(x))) = -(f(x) - g(x))$$

Hieruit mogen we concluderen dat $f - g$ ook een oneven functie is, dus gRf. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel nu dat fRg en dat gRh voor zekere functies $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dan geldt dus dat zowel $g - f$ als $h - g$ een oneven functie is, dus $g(-x) - f(-x) = -(g(x) - f(x))$ en $h(-x) - g(-x) = -(h(x) - g(x))$. Dan kunnen we ook kijken naar het volgende:

$$h(-x) - f(-x) = h(-x) - g(-x) + g(-x) - f(-x) = -(h(x) - g(x) - (g(x) - f(x)) =$$

$$-h(x) + g(x) - g(x) + f(x) = -(h(x) - f(x))$$

Hieruit mogen we concluderen dat $h - f$ ook een oneven functie is, dus fRh. Dus de relatie is symmetrisch.

Dus de relatie is een equivalentierelatie.

(6b) Om te laten zien dat $[f] = [g]$ moeten we bewijzen dat fRg, waarbij we mogen gebruiken dat $\sin(-x) = -\sin(x)$.

We zien dat $(g - f)(x)$ gelijk is aan de functie $e^{-x} - e^{x} - x - \sin(x)$. We zien nu het volgende:

$$(g-f)(-x) = e^{--x} - e^{-x} + x - \sin(-x) = e^{x} - e^{-x} + x + \sin(x) = -(e^{-x} - e^{x} - x - \sin(x)) = -(g-f)(x)$$

Dus we zien dat $g - f$ daadwerkelijk een oneven functie is, dus hieruit volgt dat fRg en dus dat $[f] = [g]$.

(6c) De functies in $[h]$ zijn de functies waarvoor geldt dat $g - h$ een oneven functie is. Aangezien h echter overal gelijk is aan 0, geldt dat $g - h = g$. En die functie moet dan oneven zijn. Dus de equivalentieklasse van h bestaat uit alle oneven functies.

In de beschrijving van de vraag staat al een meetkundige beschrijving gegeven van een oneven functie, en die herhalen we voor de volledigheid hier nog een keertje. De functies in $[h]$ zijn precies de functies waarvoor geldt dat de grafiek van die functie puntsymmetrisch is onder rotatie over 180 graden om de oorsprong.