Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Tentamen Uitwerkingen Wat is Wiskunde B, donderdag 3 februari, 2005

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
* Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
* Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat , boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Bepaal alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van de congruentie stelsel

$$x \equiv 1 \bmod 3, \;\; x \equiv 2 \bmod 5, \;\; x \equiv 4 \bmod 7.$$

Oplossing We gebruiken de Chinees reststelling. Gegeven $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 7$, $N_1 = 35$, $N_2 = 21$ en $N_3 = 15$. Het is makkelijk te zien dat $y_1 = -1$ voldoet aan $35y_1 \equiv 1 \bmod 3$, $y_2 = 1$ voldoet aan $21y_1 \equiv 1 \bmod 5$, en $y_3 = 1$ voldoet aan $15y_1 \equiv 1 \bmod 7$. Dus één oplossing is gegeven door $x = a_1y_1N_1 + a_2y_2N_2 + a_3y_3N_3 = 67$, en $\{n \in \mathbb{Z} : n \equiv 67 \bmod 105\}$ is de verzameling van alle oplossingen

2. Zij $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ een functie die wordt gegeven door $f(x) = x^3$. Let op, het domein van deze functie is $\mathbb{Z}$.

   (a) Bepaal het bereik van f.

   (b) Is f injectief? Surjectief? Motiveer je antwoord.

   (c) Bepaal $f^{-1}([-1, 10])$.

Oplossing (a) $\text{Ber}(f) = \{n^3 : n \in \mathbb{Z}\}$.

Oplossing (b) Als een functie van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{R}$, is f niet surjectief en dus niet bijectief.

Oplossing (c) $f^{-1}([-1, 10]) = \{n \in \mathbb{Z} : n^3 \in [-1, 10] = \{-1, 0, 1, 2\}$

3. Laat $f : X \to Y$ een functie zijn en $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Bewijs onderstaande beweringen of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) $g(g^{-1}(B)) \subseteq B$.

   (a) $g^{-1}(g(A)) \subseteq A$.

Oplossing (a) De bewering is waar. Stel dat $y \in g(g^{-1}(B))$, dan is er een $x \in g^{-1}(B)$ met $y = f(x)$. Maar $x \in g^{-1}(B)$ impliciert dat $y = g(x) \in B$. Dus $g(g^{-1}(B)) \subseteq B$

Oplossing (b) De bewering is niet waar. Tegenvoorbeeld: zij $g(x) = x^2$, $A = [0,1]$. Dan $g(A) = [0,1]$ en $g^{-1}(g(A)) = g^{-1}([0,1]) = [-1,1]$. Dus $g^{-1}(g(A))$ is niet een deelverzameling van A.

4. Laat $U = \{0,1\}$ en $V \subset \mathbb{N}$ en laat $\mathcal{F}$ de verzameling van alle functies $f : U \to V$ zijn.

   (a) Toon voor $V = \{1,2,3\}$ aan dat $|\mathcal{F}| = 9$.

   (b) Bewijs voor willekeurige V dat $\mathcal{F}$ en $V \times V$ dezelfde kardinaliteit hebben.

   (c) Als $\|V\| = n$ met $n \in \mathbb{N}$, wat is dan $|\mathcal{F}|$? Bewijs je bewering

Oplossing (a) We kunnen ieder functie $f : U \to V$ identificeren met de verzameling $\{(0,f(0)),(1,f(1))\}$. Omdat $f(0), f(1) \in \{1,2,3\}$, zien we dat $\mathcal{F}$ 9 elementen heeft $f_1 = \{(0,1),(1,1)\}$, $f_2 = \{(0,1),(1,2)\}$ $f_3 = \{(0,1),(1,3)\}$, $f_4 = \{(0,2),(1,1)\}$, $f_5 = \{(0,2),(1,2)\}$, $f_6 = \{(0,2),(1,3)\}$, $f_7 = \{(0,3),(1,1)\}$, $f_8 = \{(0,3),(1,2)\}$, en $f_9 = \{(0,3),(1,3)\}$. Dus, $|\mathcal{F}| = 9$.

Oplossing (b) Definieer $G : \mathcal{F} \to V \times V$ door $G(f) = (f(0), f(1))$. We bewijzen dat G een bijectie is. Stel dat $G(f) = G(g)$, dan $(f(0),f(1)) = (g(0),g(1))$. Dus, $f(0) = g(0)$ en $f(1) = g(1)$. Omdat $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$, er volgt dat $f = g$. Dus, G is injectief. Nu stel dat $(v_1, v_2) \in V \times V$. Definieer $f : U \to V$ door $f(0) = v_1$ and $f(1) = v_2$. Dan $f \in \mathcal{F}$ voldoet aan $G(f) = (v_1, v_2)$. Dus G is surjectief en dus bijectief en dus hebben $\mathcal{F}$ en $V \times V$ dezelfde kardinaliteit.

Oplossing (c) Gegeven $|V| = n$, dus $|V \times V| = n^2$. Nu $V \times V$ en $\mathcal{F}$ zijn allebei eindig met dezelfde kardinaliteit, dus $|\mathcal{F}| = |V \times V| = n^2$.

5. Laat G de deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn die bestaat uit de complexe getallen $1, -1, i, -i$ en laat $*$ de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{C}$ zijn.

   (a) Geef de vermenigvuldig tabel van G voor de operatie $*$.

   (b) Toon aan dat $(G, *)$ een groep is.

   (c) Laat $H = \{1, -1\}$, toon aan dat $(H, *)$ een deelgroep is van $(G, *)$.

   (d) Bepaal $[G : H]$, d.w.z. de index van H in G.

Oplossing (a)

*	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Oplossing (b) Merk op dat $*$ associatief is omdat de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{C}$ associatief is. 1 is de identiteitselement, en de inverse zijn gegeven door $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $(i)^{-1} = -i$ en $(-i)^{-1} = i$. Dus $(G, *)$ is een groep.

Oplossing (c) Duidelijk dat H gesloten is onder $*$, $1 \in H$ en $1^{-1} = 1 \in H$ en $(-1)^{-1} = -1 \in H$. Dus $(H, *)$ is een deelgroep van $(G, *)$.

Oplossing (d) Merk op dat $[G : H]$ is het aantal rechter nevenklassen van H. Het is eenvoudig te zien dat er zijn alleen maar twee rechter nevenklassen van H, namelijk $H * 1 = H = H * (-1)$ en $H * i = \{i, -i\} = H * (-i)$. Dus $[G : H] = 2$

6. Zij $(\mathcal{G}, *)$ een eindige groep zijn met eenheidselement e. Zij $x \in \mathcal{G}$ en definieer de functie $f_x : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ door $f_x(z) = x * z$.

   (a) Bewijs dat f_x een bijectie is.

   (b) Bepaal f_e.

   (c) Toon aan dat $f_x \circ f_y = f_{x*y}$.

   (d) Bewijs dat als $x * x * x = e$ dat dan $f_x \circ f_x \circ f_x$ de identiteitsfunctie op $\mathcal{G}$ is

Oplossing (a) Stel dat $f_x(z) = f_x(u)$, dan $x * z = x * u$ en dus $x = u$. Dus is f injectief. Nu stel dat $g \in \mathcal{G}$, dan er is een unieke $z \in \mathcal{G}$ zodat $x * z = g$. Dus $f_x(z) = x * z = g$, er volgt dat g surjectief is en dus f_x bijectief is.

Oplossing (b) Zij $z \in \mathcal{G}$, dan $f_e(z) = e * z = z = i_{\mathcal{G}}(z)$. Dus $f_e = i_{\mathcal{G}}$, waarbij $i_{\mathcal{G}}$ de identiteitsfunctie op $\mathcal{G}$ is.

Oplossing (c) Zij $z \in \mathcal{G}$, dan $f_x \circ f_y(z) = f_x(f_y(z)) = f_x(y * z) = x * (y * z) = (x * y) * z = f_{x*y}(z)$. Dus $f_x \circ f_y = f_{x*y}$.

Oplossing (d) Stel dat $x * x * x = e$. Uit onderdeel (b) en (c), $f_x \circ f_x \circ f_x = f_x \circ (f_x \circ f_x) = f_x \circ f_{x*x} = f_{x*x*x} = f_e = i_{\mathcal{G}}$.