Uitwerking tentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

19 november 2017

(1a) We gebruiken een waarheidstabel. Dit ziet er als volgt uit:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q$	$\sim P$	$((P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Dus we zien dat de uitspraak inderdaad een tautologie is.

(1b) De uitspraak van injectiviteit ziet er als volgt uit:

$$\forall r \in X \forall s \in X : f(r) = f(s) \Rightarrow r = s$$

De uitspraak van surjectiviteit ziet er als volgt uit:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

Er zijn natuurlijk meer mogelijkheden, maar deze lijken het eenvoudigst te zijn.

(2a) Als we aannemen dat $X = Y$, dan hebben we onmiddellijk dat $X = X \cap Y = Y$ en $X = X \cup Y = Y$. Dus daaruit volgt al dat $X \cup Y = X \cap Y$.

Nu nemen we aan dat $X \cap Y = X \cup Y$. Zij nu een willekeurig element $z \in X \cup Y$ gegeven. We nemen nu zonder verlies van algemeenheid aan dat $z \in X$. Het geval $z \in Y$ gaat hetzelfde. Aangezien $z \in X \cup Y$, hebben we ook dat $z \in X \cap Y$, dus in het bijzonder dat $z \in Y$. Dus voor ieder element $z \in X$ hebben we dat $z \in Y$. Het andere geval geeft ons op dezelfde manier dat voor ieder element $w \in Y$ we hebben dat $w \in X$. Dus we hebben zowel dat $X \subseteq Y$ als $Y \subseteq X$, dus $X = Y$.

(2b) We bewijzen de drie eigenschappen van een equivalentierelatie.

Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt duidelijk dat $\lceil x \rceil = \lceil x \rceil$. Dus we hebben dat xRx. Dus de relatie is reflexief.

Stel nu dat xRy voor zekere functies $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt dus dat $\lceil x \rceil = \lceil y \rceil$. Dus ook dat $\lceil y \rceil = \lceil x \rceil$. Hieruit mogen we concluderen dat yRx. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel nu dat xRy en dat yRz voor zekere functies $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dan geldt dus dat zowel $\lceil x \rceil = \lceil y \rceil$ als $\lceil y \rceil = \lceil z \rceil$, dus we hebben ook meteen dat $\lceil x \rceil = \lceil z \rceil$. Hieruit mogen we concluderen dat xRz. Dus de relatie is symmetrisch.

Dus de relatie is een equivalentierelatie.

(2c) De partitie van $\mathbb{R}$ is als volgt: de partitie bestaat uit alle intervallen van de vorm $(k, k+1]$ waarbij $k \in \mathbb{Z}$.

Dit is duidelijk een partitie van $\mathbb{R}$. Ook is duidelijk dat voor $x, y \in (k, k+1]$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}$ dat $\lceil x \rceil = k+1 = \lceil y \rceil$, dus xRy. Stel nu dat $v \in (k, k+1]$ en $w \in (l, l+1]$ waarbij $k \neq l$, dan geldt dat $\lceil v \rceil = k+1 \neq l+1 \lceil w \rceil$, dus $v \not R w$.

Dit bewijst dat de gegeven partitie de gevraagde partitie is.

(3a) We bewijzen eerst de inductiebasis. We bewijzen dus de uitspraak voor $n = 1$. We hebben dat:

$$t_1 = \frac{1}{2^1} + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = 2 - 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{2^{1-1}}$$

Dus dit bewijst de uitspraak voor $n = 1$.

Stel nu dat de uitspraak geldt voor een zekere $n \in \mathbb{N}$, dus we hebben dat $t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. We bewijzen nu dat de uitspraak ook geldt voor $n+1$.

We kijken naar t_{n+1} dan zien we het volgende:

$$\frac{n+1}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2(n+1)}{2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{n+1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}+\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

We geberuiken nu de inductiehypothese om te zeggen dat $\frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Dus we krijgen dat:

$$t_{n+1} = \frac{1}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Dus hiermee is bewezen dat $t_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Dus hiermee is de inductiestap bewezen.

We mogen hiermee concluderen dat $t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(3b) Als n groot wordt, zal $\frac{1}{2^{n-1}}$ steeds kleiner en kleiner worden, dus we verwachten dat $t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ naar 2 zal convergeren als n naar oneindig gaat. We bewijzen dit nu met een ϵ, N-bewijs.

Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen $N = \max(1, \lceil \log_2(1/\epsilon) + 1 \rceil)$.

Voor $n > N$ kijken we nu naar

$$\left| 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2 \right| = \left| \frac{1}{2^{n-1}} \right| < \left| \frac{1}{2^{N-1}} \right|$$

Stel nu dat $\epsilon \geq 1$, in dat geval geldt dat $\log_2(1/\epsilon) + 1 \leq 1$ en dus hebben we dat $N = 1$. Dit geeft dat

$$\left| \frac{1}{2^{N-1}} \right| = \left| \frac{1}{2^0} \right| = 1 \leq \epsilon$$

.

Stel nu dat $\epsilon < 1$, in dat geval geldt dat $\log_2(1/\epsilon) \geq 1$ en dus hebben we dat $N = \lceil \log_2(1/\epsilon) + 1 \rceil$. Dit geeft dat:

$$\left| \frac{1}{2^{N-1}} \right| \leq \left| \frac{1}{2^{\log_2(1/\epsilon)+1-1}} \right| = \left| \frac{1}{1/\epsilon} \right| = \epsilon$$

In beide gevallen mogen we dus concluderen dat:

$$\left| 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2 \right| < \left| \frac{1}{2^{N-1}} \right| \leq \epsilon$$

Dus hiermee is bewezen dat $\lim_{n\to\infty} t_n = 2$.

(3c) We hebben gegeven dat $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Als we hierin invullen dat $\lim_{n\to\infty} t_n = 2$ en dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, dan krijgen we dat $2 = 0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Dus hieruit kunnen we concluderen dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

(4a) Als geldt dat voor alle $x \in X$ we hebben dat $(g \circ f)(x) = x$, dan moet in eerste instantie gelden dat X in zijn geheel bereikt wordt door g. Als er een $x \in X$ bestaat zodat er geen $y \in Y$ is zodat $g(y) = x$, dan kan al helemaal niet gelden dat $g(f(x)) = x$, aangezien $f(x) \in Y$. Dus we moeten wel hebben dat g surjectief is.

(4b) Stel dat f niet injectief is, dus dan geldt dat voor zekere $x_1, x_2 \in X$ dat $f(x_1) = f(x_2)$, maar ook dat $x_1 \neq x_2$. Dan geldt bovendien dat $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Als we echter willen hebben dat $g(f(x_1)) = x_1$ en dat $g(f(x_2)) = x_2$, dan moeten we ook hebben dat $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, maar we namen juist aan dat $x_1 \neq x_2$, dus dit is onmogelijk. Dit leidt dus tot een tegenspraak. Dit geeft dus dat f wel injectief moet zijn.

(4c) Zij een injectieve functie f gegeven. Kies een element $x_0 \in X$. We definiëren de functie g als volgt:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{als } \exists x \in X : f(x) = y \\ x_0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voor deze functie geldt duidelijk dat $(g \circ f)(x) = x$ voor alle x. Ook is de functie goed gedefinieerd, aangezien $f^{-1}(y)$ maar een enkel element bevat, want f is injectief.

(5a) We zien dat $f((0,1)) = 0 + 5 \cdot 1 = 5$ en dat $f((1,2)) = 1 + 2 \cdot 5 = 11$.

Zij nu (i,n) en (j,m) gegeven zodat $f((i,n)) = f((j,m))$. Dan geldt dus dat $i + 5n = j + 5m$. Aangezien $f((i,n)) = f((j,m))$, geldt dus ook dat $f((i,n)) \mod 5 \equiv f((j,m)) \mod 5$, dus ook $i + 5n \equiv j + 5m \mod 5$. Hieruit volgt dus dat $i \equiv j \mod 5$, en aangezien zowel i als j kleiner dan 5 zijn, hebben we dat $i = j$. Dus we hebben ook dat $5n = 5m$, dus $n = m$.

Hieruit volgt dus dat $f((i,n)) = f((j,m))$ impliceert dat $(i,n) = (j,m)$. Dus f is injectief.

(5b) We hebben in het vorige onderdeeltje al gezien dat er een injectie $f : \{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}$ bestaat. Dus we hebben al dat $|\{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$.

De andere kant op bestaat er ook een injectie. Bekijk bijvoorbeeld de functie $g : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}$ die als volgt is gedefinieerd: $g(n) = (0, n)$. Dit is duidelijk een injectie, dus we hebben ook dat $|\mathbb{N}| \leq |\{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}|$.

De stelling van Cantor-Schröder-Bernstein zegt nu dat we mogen concluderen dat $|\{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. dus de verzameling $\{0,1,2,3,4\} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar oneindig.

(5c) We kunnen een injectie $f : \{-1,1\} \times \mathbb{R}$ definiëren. Dit doen we als volgt:

$$f(a,r) = \begin{cases} e^r & \text{als } a = 1 \\ -e^r & \text{als } a = -1 \end{cases}$$

We kunnen nu laten zien dat dit een injectie is. Stel dat er (a,r) en (b,s) bestaan zodat $f(a,r) = f(b,s)$. Hieruit volgt al onmiddelijk dat $a = b$, want $a \neq b$ impliceert dat ofwel $f(a,r)$ of $f(b,s)$ groter moet zijn dan 0 en de ander kleiner dan 0, wat niet kan als de twee waardes gelijk zijn. Dus hieruit volgt ook dat $e^r = e^s$. Aangezien de functie e^x een injectieve functie is, volgt hier dus uit dat $s = r$. Dus we hebben bewezen dat $f(a,r) = f(b,s)$ impliceert dat $(a,r) = (b,s)$. Dus de functie f is injectief.

Hieruit volgt dus dat $|\{-1,1\} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}|$.

(5d) De andere kant op bestaat er ook een injectie. Bekijk bijvoorbeeld de functie $g : \mathbb{R} \to \{-1,1\} \times \mathbb{R}$ die als volgt is gedefinieerd: $g(r) = (1, r)$. Dit is duidelijk een injectie, dus we hebben ook dat $|\mathbb{R}| \leq |\{-1,1\} \times \mathbb{R}|$.

De stelling van Cantor-Schröder-Bernstein zegt nu dat we mogen concluderen dat $|\{-1,1\} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

(6a) We nemen nu aan dat $m|n$. Zij nu een element uit $b \in [a]_n$ gegeven. We moeten het volgende bewijzen: uit $b \equiv a \mod n$ volgt dat $b \equiv a \mod m$.

Een gevolg van het feit dat $b \equiv a \mod n$ is dat $n|(a-b)$. Aangezien we ook aannamen dat $m|n$ volgt hieruit meteen dat $m|(a-b)$ dus ook dat $b \equiv a \mod m$. Hieruit volgt dat $b \in [a]_m$. Dit is onafhankelijk van a en b, dus de functie f is wel gedefinieerd.

(6b) We gebruiken een bewijs met contrapositie.

Stel nu dat $m \nmid n$. We zoeken nu naar b en a zodat $b \equiv a \mod n$, maar $b \not\equiv a \mod m$. Zij nu een willekeurige b en a gegeven zodat $b \equiv a \mod n$. Als we nu al hebben dat $b \not\equiv a \mod m$, zijn we klaar. Dus stel dat $b \equiv a \mod m$. Dan kijken we naar $b+n$ en a. We hebben dan dat $b + n \equiv a \mod n$. We hebben echter ook dat $b + n \not\equiv a \mod m$, omdat $n \not\equiv 0 \mod m$. Dit laatste is een gevolg van het feit dat $m \nmid n$. Dus we hebben nu een paar elementen gevonden waarvoor de functie f niet welgedefinieerd is.

Dus als de functie f wel welgedefinieerd is, moeten we hebben dat $m|n$.

(6c) Laat nu een c zo gegeven zijn dat $c \equiv a+b \mod n$. Dit houdt dus in dat $n|(a+b-c)$. Aangezien we nu ook weer hebben dat $m|n$ hebben we ook dat $m|(a+b-c)$, dus $c = a+b \mod m$. Hieruit volgt dat $c \in [a]_m + [b]_m$. Aangezien dit werkt onafhankelijk van a, b, en c, hebben we nu dus dat $f([a+b]_n) = [a+b]_m$, ofwel, anders opgeschreven, $f([a]_n + [b]_n) = f([a]_n) + f([b]_n)$.

Laat nu een c zo gegeven zijn dat $c \equiv ab \mod n$. Dit houdt dus in dat $n|(ab-c)$. Aangezien we nu ook weer hebben dat $m|n$ hebben we ook dat $m|(ab-c)$, dus $c = ab \mod m$. Hieruit volgt dat $c \in [a]_m[b]_m$. Aangezien dit werkt onafhankelijk van a, b, en c, hebben we nu dus dat $f([ab]_n) = [ab]_m$, ofwel, anders opgeschreven, $f([a]_n[b]_n) = f([a]_n)f([b]_n)$.

Deze beide bewijzen zijn dus in zekere zin een gevolg van het feit dat $[a+b] = [a] + [b]$ en $[ab] = [a][b]$.