Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2005/2006 gegeven door Karma Dajani.

Wat is Wiskunde, eerste deeltentamen (WISB101)
9 november 2005

- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.

Opgave 1 *(10 punten)*

Ga met behulp van waarheidstafels na of de volgende twee expressies logisch equivalent zijn. Bewijs je bewering.

a) $(P \wedge Q) \rightarrow R$

b) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

Opgave 2 *(10 punten)*

Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen:

a) $(A \cup B) \cap C \subseteq (B \cap C) \cup A$

b) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Opgave 3 *(10 punten)*

Vind en bewijs met volledige inductie een formule voor de som van de eerste n oneven getallen (d.w.z. 1, 1+3, 1+3+5, ...), en laat zien dat hier altijd het kwadraat van een natuurlijk getal uitkomt.

Opgave 4 *(10 punten)*

Definieer de relaties $\sim$ en $\cong$ op $\mathbb{Z}$ als volgt: $x \sim y$ als $x + y$ deelbaar is door 3; $x \cong y$ als $x + y$ deelbaar is door 2.

a) Ga na of $\sim$ een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

b) Ga na of $\cong$ een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

Opgave 5 *(10 punten)*

a) Bepaal getallen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ zodat $13x_0 + 21y_0 = 1$.

b) Vind alle oplossingen $x, y \in \mathbb{Z}$ van de vergelijking $13x+21y = 6$. (Als je (a) niet hebt kunnen oplossen, neem aan dat je een paar getallen x_0, y_0 gevonden hebt met $13x_0 + 21y_0 = 1$.)

Opgave 6 *(10 punten)*

a, b en c zijn een stel Pythagoreische drietallen, d.w.z. natuurlijke getallen zodat $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Stel de grootste gemene deler van a en c is m. Laat zien dat m ook een deler is van b.
In de rest van de som veronderstellen we dat a en c onderling priem zijn.

b) Laat zien dat c oneven is en dat van de getallen a en b een van beide oneven is en de andere even.

c) We veronderstellen nu dat a het oneven getal is en b het even getal. Stel $p = \frac{c-a}{2}$ en $q = \frac{c+a}{2}$. Dan zijn p en q allebei gehele getallen. Bewijs dat p en q onderling priem (d.w.z. relatief priem) zijn.

d) **Bonusopgave** *(5 punten)*
Toon nu aan dat p en q allebei kwadraten zijn van natuurlijke getallen m en n. Druk a, b, c uit in m en n.