DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WATWISA WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR JAN HOGENDIJK.

Uitwerking[1] Wat is Wiskunde A (WATWISa) 9 november 2005

- Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
- Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, rekenmachine, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1

Ga met behulp van waarheidstafels na of de volgende twee expressies logisch equivalent zijn. Bewijs je bewering.
N.B. Helaas is er geen uitwerking voor deze opgave.

a) $(P \wedge Q) \rightarrow R$.

b) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$.

Opgave 2

Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen:

a) $(A \cup B) \cap C \subseteq (B \cap C) \cup A$.

Antwoord

Bewijs. Zij $x \in (A \cup B) \cap C$. Dan geldt dat $x \in A \cup B$ en $x \in C$. Stel dat $x \in A$, dan geldt ook dat $x \in (B \cap C) \cup A$. Stel dat $x \in B$ dan geldt dat $x \in B \cap C$ en daarom ook dat $x \in (B \cap C) \cup A$. In ieder geval uit $x \in (A \cup B) \cap C$ volgt $x \in (B \cap C) \cup A$ dus geldt $(A \cup B) \cap C \subseteq (B \cap C) \cup A$. $\square$

b) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Antwoord

Bewijs. Zij $x \in (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$. Dat betekent dat x in tenminste een van de drie verzamelingen zit. Stel dat $x \in A - B$, dus $x \in A$ en $x \notin B$. Uit $x \in A$ volgt $x \in A \cup B \cup C$. Uit $x \notin B$ volgt $x \notin A \cap B \cap C$ dus geldt $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. Op precies dezelfde manier volgt (omdat alle beweringen symmetrisch zijn in A, B en C) dat als $x \in B - C$ of $x \in C - A$ dan geldt $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. Daarmee volgt $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. $\square$

Opgave 3

Vind en bewijs met volledige inductie een formule voor de som van de eerste n oneven getallen (d.w.z. $1, 1 + 3, 1 + 3 + 5 \ldots$) , en laat zien dat hier altijd het kwadraat van een natuurlijk getal uitkomt.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Antwoord

Bewijs. We gaan bewijzen met volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Inductiebasis: Voor $n = 1$ op de linkerkant staat het getal 1 en op de rechterkant het getal $1^2 = 1$, dus het klopt.
Inductiestap: We nemen aan dat de formule klopt voor n en gaan na of het voor $n + 1$ ook klopt. Voor $n + 1$ hebben we op de linkerkant:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1.$$

Op de rechterkant van de formule staat, voor $n+1$ gewoon, $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. We zien dus dat beide kanten gelijk zijn, en daarmee is de inductiestap bewezen. $\square$

Het volgt uit het principe van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ gelijk is aan het kwadraat n^2.

Opgave 4

Definieer de relaties $\sim$ en $\cong$ op $\mathbb{Z}$ als volgt:
$x \sim y$ als $x + y$ deelbaar is door 3; $x \cong y$ als $x + y$ deelbaar is door 2.

a) Ga na of $\sim$ een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

Antwoord We gaan na of R reflexief is. Zij $x \in \mathbb{Z}$. Het geldt dat xRx als $x + x = 2x$ een veelvoud van 3 is. Dat is duidelijk niet waar voor elke $x \in \mathbb{Z}$, bijvoorbeeld voor $x = 1$ is 3 geen deler van $1 + 1$. Daarom is R geen reflexieve relatie en dus ook geen equivalentierelatie.

b) Ga na of $\cong$ een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

Antwoord We gaan na of S reflexief is, d.w.z. of voor elke $a \in \mathbb{Z}$ geldt aSa. Zij $a \in \mathbb{Z}$. $a+a = 2a$ is een veelvoud van 2, dus geldt aSa, en dus S is reflexief.

Nu gaan we na of S symmetrisch is, d.w.z. dat voor elke $a, b \in \mathbb{Z}$ uit aSb volgt bSa. Zij $a, b \in \mathbb{Z}$ en stel dat aSb. Dat betekent dat 2 deelt $a + b$, maar dan deelt 2 ook $b + a$ en dus geldt bSa. Hiermee is bewezen dat S symmetrisch is.

Tenslotte gaan we na of S transitief is, d.w.z. of voor elke $a, b, c \in \mathbb{Z}$ uit aSb en bSc volgt aSc. Zij $a, b, c \in \mathbb{Z}$ en stel dat aSb en bSc. Dat betekent dat 2 deelt $a + b$ en $b + c$. Het volgt dat 2 deelt de som $(a + b) + (b + c) = a + 2b + c$. Omdat $2b$ een veelvoud van 2 is, volgt dat $a + c$ ook een veelvoud van 2 is, dus aSc. We hebben dus bewezen dat S reflexief, symmetrisch en transitief is, dus een equivalentierelatie.

Om de equivalentieklasses af te tellen proberen we eerst een paar equivalentieklasses te bepalen. De equivalentieklasse van 1 is $[1] = \{a \in \mathbb{Z} | 1Sa\}$ en a is S gerelateerd aan 1 precies als $1+a$ een veelvoud van 2 is. Dat gebeurt precies waneer a oneven is. We hebben dus dat $[1] = \{a \in \mathbb{Z} | a \text{is oneven}\}$. De equivalentieklasse van 0 is $[0] = \{a \in \mathbb{Z} | aS0\}$ en a is S gerelateerd aan 0 precies als 2 een deler van $a + 0 = a$ is, dus waneer a even is. Dus $[0] = \{a \in \mathbb{Z} | a \text{is even}\}$. Duidelijk geldt dat $[0] \cup [1] = \mathbb{Z}$ en deze twee klasses zijn verschillende klasses. Dus hebben we alle 2 equivalentieklasses gevonden.

Opgave 5

a) Bepaal getallen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ zodat $13x_0 + 21y_0 = 1$.

Antwoord

Bewijs. We gaan het algoritme van Euclides toepassen.

$$\begin{aligned} 21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\ 13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Dat bewijst dat $ggd(13, 21) = 1$, en nu met de hulp van deze vergelijkingen gaan we x_0 en y_0 vinden:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5) \\ &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8) = 5 \cdot 8 - 313 \\ &= 5(21 - 13) - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 \end{aligned}$$

dus $x_0 = -8$ en $y_0 = 5$. Even controleren of dat klopt:

$$5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 105 - 104 = 1.$$

$\square$

b) Vind alle oplossingen $x, y \in \mathbb{Z}$ van de vergelijking $13x + 21y = 6$. (als je (a) niet hebt kunnen oplossen, neem aan dat je een paar getallen x_0, y_0 gevonden hebt met $13x_0 + 21y_0 = 1$.)

Antwoord

Bewijs. We gaan de volgende stelling toepassen: Een diophantische vergelijking $ax + by = c$ met $d = ggd(a, b)|c$ heeft oneindig veel oplossingen en als (x_0, y_0) een bepaalde oplossing is, dan zijn alle oplossingen $\{(x_0 + \frac{b}{d}n, y_0 - \frac{a}{d}n)|n \in \mathbb{Z}\}$. Dus moeten we eerst een oplossing vinden.

Omdat $5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 1$, hebben we $31 \cdot 21 - 48 \cdot 13 = 6$, dus het paar $(-48, 30$ is een oplossing. We hebben al gezien dat $ggd(13, 21) = 1$, dus alle oplossingen zijn $\{(-48 + 21 \cdot n, 30 - 13 \cdot n)|n \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Opgave 6

a, b en c zijn een stel Pythagoreische drietallen, d.w.z natuurlijke getallen zodat $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Stel de grootste gemene deler van a en c is m. Laat zien dat m ook een deler is van b.

Antwoord

Bewijs. m deelt a en c, dus m^2 deelt a^2 en c^2. m^2 deelt dus het verschil $c^2 - a^2 = b^2$. Dus m^2 deelt b^2. Zij p een priem deler van m. Dan geldt: p deelt m^2 en dus ook dat p een deler is van b^2. Dat betekent dat p deelt b (dat volgt uit het lemma van Euclides). Uit de fundamentale stelling van rekenkunde is m als een product van priem getallen te schrijven. Elk van deze priem getallen deelt b dus is m (het product van deze priemgetallen) ook een deler van b. Daarmee is bewezen dat m een deler van b is. $\square$

In de rest van de som veronderstellen we dat a en c onderling priem zijn.

b) Laat zien dat c oneven is en dat van de getallen a en b een van beide oneven is en de andere even.

Antwoord

Bewijs. Stel, om een tegenspraak te bereiken, dat c even is. Uit dit volgt dat a oneven moet zijn, anders zouden a en c 2 als gemene deler hebben (in tegenspraak met $ggd(a, c) = 1$). In de vergelijking $a^2+b^2 = c^2$ op de rechterkant staat een even getal (het kwadraat van een even getal is even), daarom is de linkerkant ook even. Maar a is oneven en dus ook a^2 dus moet b^2 ook oneven zijn (anders is b^2 even en c^2, als de som van en even en een oneven getal, oneven zou zijn), en dat betekent dat b oneven is. Schrijf $a = 2n + 1$ een $b = 2m + 1$, dan geldt $c^2 = a^2 + b^2 = 4 \cdot (n^2 + m^2 + n + m) + 2$ en dat is geen veelvoud van 4. Maar c is even dus 2 deelt c en daarom is c^2 een veelvoud van 4, tegenspraak. Dus c moet oneven zijn. Dan is c^2 ook oneven een daarom is de som $a^2 + b^2$ oneven.

Uit dit volgt dat van de getallen a^2 en b^2 een van biede oneven is en de andere even. En omdaat voor elk $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat a even is d.e.s.d.a. a^2 even is volgt dat van de getallen a en b een oneven is en de andere even. □

c) We veronderstellen nu dat a het oneven getal is en b het even getal. Stel $p = \frac{c-a}{2}$ en $q = \frac{c+a}{2}$. Dan zijn p en q allebei gehele getallen.

Bewijs dat p en q onderling priem (d.w.z. relatief priem) zijn.

Antwoord

Bewijs. Zij d een gemene positieve deler van p en q. Dan is d een deler van $p + q = c$ en ook van $q - p = a$. Dus d is een gemene deler van a en c, maar we hebben aangenomen dat a en c onderling priem zijn, dus $d = 1$ en is de grootste gemene deler van p en q gelijk aan 1. □

d) Bonusopgave (deze hoeft niet verplicht gemaakt te worden, maar als hij goed gemaakt wordt levert hij een halve punt extra op): Toon nu aan dat p en q allebei kwadraten zijn van natuurlijke getallen m en n. Druk a, b, c uit in m en n.

Antwoord

Bewijs. We hebben al gevonden dat $c = p + q$ en dat $a = q - p$. Uit $a^2 + b^2 = c^2$ volgt:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (p + q)^2 - (q - p)^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (q^2 - 2pq + p^2) = 4pq$$

dus $pq = (fracb2)^2$ is een kwadraat. We merken op dat een geheel getal een kwadraat is dan en slechts dan als het te schrijven is als een product van verschillende priemgetallen waarin elke exponent even is. Schrijf $p = u_1^{e_1} \cdot \dots \cdot u_t^{e_t}$ en $q = v_1^{f_1} \cdot \dots \cdot v_s^{f_s}$ als een product van verschilende priemgetallen. Omdat p en q onderling priem zijn, volgt dat geen van de u_i gelijk is aan een met de v_j.

Dan geldt

$$\left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = pq = u_1^{e_1} \cdot \dots \cdot u_t^{e_t} \cdot v_1^{f_1} \cdot \dots \cdot v_s^{f_s},$$

maar dit is een kwadraat, dus elke exponent moet even zijn. Maar dan zijn p en q kwadraten. Zijn dus m, n zodat $p = m^2$ en $q = n^2$. Het volgt dat

$$\begin{aligned} b &= 2\sqrt{pq} = 2mn \\ a &= q - p = n^2 - m^2 \\ c &= p + q = m^2 + n^2 \end{aligned}$$

□