

Wat is Wiskunde A (WISB101) 13 november 2003

N.B. Alle opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

Construeer waarheidstabellen voor de onderstaande expressies:

- a) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$,
- b) $\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow (Q \wedge \neg R)$.

Opgave 2

A , B en C zijn deelverzamelingen van een verzameling U . Bewijs onderstaande beweringen of geef een tegenvoorbeeld.

- a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$,
- b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
- c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$,
- d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Opgave 3

De rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 5 \\ a_n &= 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 3. \end{aligned}$$

Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$.

Opgave 4

- a) Stel m en n zijn gehele getallen. Laat zien: Als er gehele getallen a en b zijn zodat $am + bn = 1$, dan is $\text{ggd}(m, n) = 1$.
- b) Bepaal alle oplossingen van de Diophantische vergelijking $24x - 42n = 30$.

Opgave 5

Definieer de relatie \sim op \mathbb{Z} als volgt:

$$x \sim y \text{ als } \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

- a) Bewijs dat \sim een equivalentierelatie is.
- b) Bepaal expliciet alle bijbehorende equivalentieklassen.

Opgave 6

- a) p is een priemgetal dat bij deling door 30 rest r geeft. Bewijs dat r dan zelf een priemgetal is of gelijk is aan 1.
- b) Bewijs dat voor elk geheel getal n geldt dat het laatste cijfer van n^5 gelijk is aan het laatste cijfer van n .