Tentamen Wat is Wiskunde?

18 december 2001, 9:00 - 12:00
Van Unnikgebouw, zalen 311 en 221

Opgave 1

Geef van elk van de volgende functies aan of ze injectief, surjectief of bijectief zijn. Het antwoord dient beknopt gemotiveerd te worden.

(a).	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x) = x^3 - 2x$
(b).	$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$,	$f(x) = x^3 - 2x$
(c).	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x) = x - \sin(x)$
(d).	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x) = x$
(e).	$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$,	$f(x) = x^2 + x - 1$
(f).	$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,	$f(x) = x^2 + x - 1$

Opgave 2

Bekijk de verzameling $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Definieer een relatie R op X door

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 y_2 = y_1 x_2.$$

(a). Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b). Geef een meetkundige beschrijving van de verzameling E van equivalentieklassen van R.

(c). Schrijf $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ en beschouw de functie $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{|x_1|}{|x|}, \frac{|x_2|}{|x|} \right).$$

Laat zien dat de vergelijking $g([(x_1, x_2)]) = f(x_1, x_2)$ een welgedefinieerde functie $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bepaalt op de verzameling van equivalentieklassen van R. Maak een plaatje van het beeld van g.

Opgave 3

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ schrijven we $\mathbb{Z}/n$ voor de verzameling van congruentieklassen modulo n in $\mathbb{Z}$. Zoals je bekend is bestaat er een welgedefinieerde optelling $\oplus$ van congruentieklassen. Voor twee getallen $m, n \in \mathbb{N}$ en een functie $f : \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/m$ zeggen we dat f de **optelling behoudt** als

$$f([a] \oplus [b]) = f([a]) \oplus f([b])$$

voor elke $a, b \in \mathbb{Z}$. Als f de optelling behoudt, geldt $f([0]) = [0]$. (Dat hoef je niet te bewijzen.)

(a). Laat zien dat een functie $f : \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/m$ die de optelling behoudt volledig bepaald wordt door de waarde $f([1])$.

(b). Kies twee natuurlijke getallen $n \neq m$ en geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/m$ die de optelling behoudt en die voldoet aan $f([1]) \neq [0]$.

(c). Bewijs dat als $\mathrm{ggd}(n, m) = 1$, elke functie $f : \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/m$ die de optelling behoudt constant is met waarde $[0]$.

Opgave 4

Geef van elk van de volgende verzamelingen X aan of ze eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar zijn. Motiveer je antwoord.

(a). $X = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ en } |A| \leq 2\}$

(b). $X = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ en } |A| \leq 2 \text{ en } \forall a \in A: \ a \leq 12\}$

(c). $X = \{f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ is een functie z.d.d. } \exists N \ \forall n \geq N \ f(n) = 0\}$