

Wat is Wiskunde A (WISB101) 8 november 2006

- Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
- Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, rekenmachine, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1

Ga met behulp van waarheidstafels na welke van de volgende drie uitspraken logisch equivalent zijn:

- a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
- b) $P \rightarrow (R \rightarrow Q)$
- c) $Q \rightarrow (R \rightarrow P)$

Opgave 2

Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen voor verzamelingen A, B, C, D:

- a) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.
- b) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

Opgave 3

Stel k is een vast natuurlijk getal. Bewijs met volledige inductie dat voor alle n in de natuurlijke getallen

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \geq \left(1 - \frac{n}{k}\right).$$

Opgave 4

Vind alle gehele getallen x, y die voldoen aan $33x + 23y = 2$.

Opgave 5

We definiëren de relatie R op de natuurlijke getallen als volgt:
 xRy als xy een kwadraat van een natuurlijk getal is.

- a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
- b) Beschrijf de equivalentieklasse $[1]$.
- c) Laat zien dat er oneindig veel verschillende equivalentieklassen zijn.

Opgave 6

- a) Laat zien dat elk priemgetal groter dan 3 van de vorm $6n - 1$ of $6n + 1$ is, met n een natuurlijk getal.
- b) Bewijs dat een product van k getallen, alle van de vorm $6n_i + 1$ (waarbij n_i natuurlijke getallen zijn) weer de vorm $6n + 1$ heeft (met n een natuurlijk getal)
- c) Laat zien dat er oneindig veel priemgetallen zijn van de vorm $6n - 1$, waarbij n een natuurlijk getal is.
(Je mag hierbij gebruiken dat er oneindig veel priemgetallen zijn).