Hertentamen Wat is Wiskunde A

3 januari 2001, 14.00 - 17.00 uur

DIT TENTAMEN BEVAT 6 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE!

(1) Construeer waarheidstabellen voor de volgende expressies:
(a) $(P \wedge \neg R) \wedge (P \rightarrow R)$
(b) $P \rightarrow (Q \vee \neg P)$

(2) Bewijs de volgende bewering: als a en b gehele getallen zijn zodat $(a+b)^2 - ab$ even is, dan zijn a en b allebei even.
(Hint: probeer eventueel een bewijs uit het ongerijmde)

(3) We geven met $|A|$ het aantal elementen van een eindige verzameling A aan. Zoals gewoonlijk is $\mathcal{P}(A)$ de machtsverzameling van A.
(a) Stel, dat A en B eindige verzamelingen zijn, zo dat $A \cap B = \emptyset$. Bewijs:

$$|\mathcal{P}(A)| \cdot |\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)|$$

(b) Laat door een tegenvoorbeeld zien, dat bovenstaande bewering niet waar hoeft te zijn, als de voorwaarde dat $A \cap B = \emptyset$ niet vervuld is.

(4) Laat voor elke $n \in \mathbb{N}$ een deelverzameling A_n van een vast gekozen verzameling U gegeven zijn. Zij ook B een deelverzameling van U. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
(a) $B' \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n$
(b) voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $A_n \subseteq B$
(Hier geeft $(-)'$ het complement met betrekking tot U aan)

(5) Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} (4k+1) = n(2n+3)$$

(6) Zij A een 2×2-matrix waarvan alle coëfficiënten absolute waarde hoogstens 1 hebben. Met A^n geven we het n-voudig matrix-product

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ keer}}$$

aan.
Bewijs met volledige inductie de volgende bewering: voor iedere $n \in \mathbb{N}$ hebben de coëfficiënten van de matrix A^n absolute waarde hoogstens 2^n. Je mag hierbij gebruiken dat voor reële getallen $x_1, \ldots, x_n$ geldt:

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$