DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB101 WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR PROF. DR. J.P. HOGENDIJK.

Wat is Wiskunde B (WISB101)
23 maart 2006

- Zet of elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
- Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1

Bepaal alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van het stelsel congruenties:

$$x \equiv 4 \bmod 7, \qquad x \equiv 5 \bmod 9, \qquad x \equiv 6 \bmod 11$$

Opgave 2

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

met D de grootste deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop f goed gedefinieerd is.
Bepaal D. Is f injectief? Is f surjectief? Motiveer je antwoord.

Opgave 3

Zij $f : X \to Y$ een functie. Zijn F en G de volgende functies. $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ voegt aan elke $A \in \mathcal{P}(X)$ zijn beeld onder f toe, en $G : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ voegt aan elke $B \in \mathcal{P}(Y)$ zijn volledig origineel onder f toe (F is de directe beeldfunctie en G de inverse beeldfunctie). Onderzoek de volgende vier uitspraken. Ga na of elke uitspraak correct is of niet. Bewijs je beweringen.

a) Als $A \in \mathcal{P}(X)$ uit een element bestaat dan bestaat $F(A)$ uit een element.

b) Als $B \in \mathcal{P}(Y)$ uit een element bestaat dan bestaat $G(B)$ uit een element.

c) Voor elke verzameling $A \in \mathcal{P}(X)$ geldt $G(F(A)) \subseteq A$.

d) Voor elke verzameling $B \in \mathcal{P}(Y)$ geldt $F(G(B)) \subseteq B$.

Opgave 4

Zij $(\mathbb{Z}, +)$ de verzameling van gehele getallen met de operatie van optellen.

a) Laat zien dat $(\mathbb{Z}, +)$ een groep is door te laten zien dat aan de groepsaxioma's wordt voldaan.

b) Is de verzameling E van alle even gehele getallen (met 0) een ondergroep van $(\mathbb{Z}, +)$? Bewijs je bewering.

c) Is de verzameling P van alle priemgetallen een ondergroep van $(\mathbb{Z}, +)$? Bewijs je bewering.

Opgave 5

Zij $A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a > b\}$.

a) Verzin een injectieve afbeelding van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ naar A.

b) Bewijs dat A en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 6

Zij G een groep.

a) Bewijs dat als G uit 2 elementen bevat dan is G abels.

b) Bewijs dat als G uit 3 elementen bevat dan is G abels.

c) **Bonusopgave** (5 punten extra, op een totaal van 60 punten) Bewijs dat als G uit 4 elementen bevat dan is G abels.