DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB101 WERD IN 2006/2007 GEGEVEN DOOR KARMA DAJANI.

Wat is Wiskunde B (WISB101)
31 januari 2007

- Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van rekenmachine, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1

Bepaal alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van het stelsel congruenties

$$x = 3(mod\, 5), \quad x = 7(mod\, 9), \quad x = 2(mod\, 4)$$

Opgave 2

Zij f de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Bepaal het domein van f en ga na of f injectief, surjectief of bijectief is.

b) Bepaal $f([1,3])$ en $f^{-1}([1,3])$.

c) Laat g de beperking van f tot $[1,\infty)$ zijn. Bewijs dat g injectief is. Bereken het beeld B van g en bereken de inverse $g^{-1} : B \to [1,\infty)$ van g.

Opgave 3

Zij $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de machtsverzameling van A en R de verzameling van alle priemgetallen.

a) Verzin een injectieve afbeelding van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $X = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid B \cap R = \phi\}$.

b) Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dezelfde kardinaliteit als X heeft.

Opgave 4

Zij S_n de symmetriegroep op n letters.

a) Bewijs dat voor $n \geq 3$ is S_n niet abels.

b) Geef 4 ondergroepen van S_{10}. Bewijs je antwoord.

c) Zij $(\mathbb{Z}_5, +)$ de groep van congruentieklassen modulo 5 met optellen. Vind alle ondergropen van deze groep.

Opgave 5

Zij $f : A \to A$ een functie en $X \subseteq A$ een deelverzameling. Geef een tegenvoorbeeld of een bewijs bij de volgende beweringen.

a) $f(f(X)) = f(X)$.

b) $f^{-1}(f^{-1}(X)) = f^{-1}(X)$.

c) $f(X) \cap f^{-1}(X) \subseteq f(f^{-1}(f^{-1}(X)))$.

Opgave 6

Zij G een groep en H de verzameling $\{g \in G \mid gx = xg \, \text{for all } x \in G\}$.

a) Bewijs dat H niet leeg is.

b) Bewijs dat H een ondergroep is van G.

c) Bereken deze ondergroep in het geval $G = S_3$.