

Wat is Wiskunde (WISB101)

24 maart 2004

- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.

Opgave 1

Zij $f(x) = x^2 - 4x + 7$

- a) Bepaal het domein en bereik van f .
- b) Bepaal een verzameling $D \subseteq \mathbb{R}$ zodanig dat $3 \in d$ en $f(x)$ is injectief op D .
- c) Bepaal $f(D)$ en f^{-1} op dit domein.

Opgave 2

Zij $A \subseteq \mathbb{N}$ een eindige deelverzameling. Definieer $\max(A)$ als het grootste element van A . Zij verder $V_n = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \max(A) = n\}$

- a) Bewijs: voor elke $n \in \mathbb{N}$ is V_n eindig.
- b) Bepaal $|V_n|$. Hint: als $|B| = k$ dan is $|\mathcal{P}(B)| = 2^k$.

Opgave 3

Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

- a) Laten $A, B \subseteq Y$ met $A \cap B = \emptyset$. Bewijs dat $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.
- b) Stel f is injectief. Laten $C, D \subseteq X$ met $C \cap D = \emptyset$. Bewijs dat $f(C) \cap f(D) = \emptyset$.
- c) Stel $X = Y = \mathbb{R}$, $C = (-\infty, 0]$ en $D = (0, \infty)$. Geef een voorbeeld van een functie f zodat $f(C) \cap f(D) = \emptyset$, terwijl f niet injectief is.

Opgave 4

- a) Zij $X = \mathbb{Z}$ en \circ de operatie gedefinieerd door: $a \circ b = a^2 + b^2$. Is deze operatie commutatief? Is hij associatief?
- b) Zij $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en de operatie $*$ gedefinieerd door: $a * b = c$, met $c \in X$ en $c \equiv ab \pmod{5}$. Laat zien dat hierdoor een groep gedefinieerd wordt.

Opgave 5

- a) Laat zien dat het niet mogelijk is onderstaande tabel zodanig af te maken dat a, b, c met de operatie $*$ een groep vormt.

$*$	a	b	c
a			b
b			
c	a		

- b) Bewijs dat als \mathcal{G} een groep is met 3 elementen, dan bevat hij geen elementen van orde 2. De orde van een element $g \in \mathcal{G}$ is de kleinste $n \in \mathbb{N}$ zodat $g^n = 1$.