Tentamen Wat is Wiskunde? - A

25 Oktober 2001, 9.00 - 12.00 uur

Opgave 1. Bewijs door middel van waarheidstabellen:

a) De expressies $P \to (Q \vee R)$ en $(P \to Q) \vee (P \to R)$ zijn equivalent.

b) De expressies $P \to (\neg Q)$ en $\neg(P \to Q)$ zijn niet equivalent.

Opgave 2. Bewijs, dat voor alle reële getallen $x > 1$ geldt:

$$\frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} > 1$$

Opgave 3. Laten A, B en C deelverzamelingen van een verzameling U zijn; met A' bedoelen we het complement van A met betrekking tot U, oftewel: $A' = U - A$.

Bewijs: als $C \cap A \subseteq B$, dan $C \subseteq A' \cup B$.

Opgave 4. Bewijs met volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt:

$$-1 + 4 - 9 + \cdots + (-1)^n \cdot n^2 \; = \; (-1)^n \cdot \frac{n^2 + n}{2}$$

Opgave 5. De rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is als volgt recursief gedefinieerd:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n + n \end{aligned}$$

Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: a_n is gelijk aan het aantal deelverzamelingen van $\{1, \ldots, n\}$ met precies twee elementen.

Opgave 6. Stel, dat R en S relaties op een verzameling A zijn (dus R en S zijn deelverzamelingen van $A \times A$).

a) Bewijs, dat als R en S beide transitief zijn, $R \cap S$ het ook is.

b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt, dat als R en S beide transitief zijn, $R \cup S$ nog niet transitief hoeft te zijn.