Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2008-2009 gegeven door Dr. M. Ruijgrok.

Wat is Wiskunde? A (WISB101)
4 november 2008

Geef, tenzij anders aangegeven, niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van elektronische hulpmiddelen, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1.

a) Ga met behulp van een waarheidstabel na of de uitspraak

$$((P \to Q) \to R) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R)$$

een tautologie is.

b) Gegeven zijn de uitspraken P, Q en R. Bovendien is gegeven dat de uitspraken

$$P \leftrightarrow Q, \quad Q \leftrightarrow R, \quad (P \to Q) \to R$$

alle drie waar zijn. Bepaal de waarden (*True* dan wel *False*) van P, Q en R.

Opgave 2.

Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$$

Opgave 3.

Bewijs de uitspraak of geef een tegenvoorbeeld.

a) Voor alle niet-lege verzamelingen A en B geldt: als $A \times B = B \times A$ dan is $A = B$.

b) Voor alle niet-lege verzamelingen A, B en C geldt: als $A \subseteq B$ en $B \not\subseteq C$ dan $A \not\subseteq C$

c) Zij $\{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ een geïndexeerde familie verzamelingen, dan is

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

Hierbij betekent A^c het complement van A, dat in het boek genoteerd wordt als A'.

Opgave 4.

Bepaal alle oplossingen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ van de vergelijking

$$62x + 22y = -6.$$

Opgave 5.

Zij $S \subseteq \mathbb{N}$ de verzameling van alle priemgetallen. We definieren de relatie $\sim$ op S door: $p \sim q$ dan en slechts dan als er een $k \in \mathbb{Z}$ is zodat $p^2 - q^2 = 6k$.

a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie op S is.

b) Hoeveel elementen heeft de equivalentieklasse [2]? Geef tenminste drie elementen van [7].

c) Bewijs dat er precies drie verschillende equivalentieklassen zijn.

Opgave 6.

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering: Voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ met

$$\text{ggd}(a, b) = 1, \quad \text{ggd}(b, c) = 2, \quad \text{ggd}(c, a) = 3$$

geldt $\text{ggd}(a + b, c) = 1$.