Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2008-2009 gegeven door Dr. M. Ruijgrok.

Hertentamen Wat is Wiskunde? A (WISB101)
20 januari 2009

Het gebruik van hulpmiddelen (rekenmachine, boek, etc.) is **niet** toegestaan.
Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je aan je antwoord bent gekomen.

Opgave 1.

a) Ga met behulp van waarheidstabellen na of de volgende uitspraak een tautologie, een tegenspraak of geen van beide is:

$$(\neg P \to Q) \vee \neg R$$

(7 punten)

b) Geef een voorbeeld van proposities P, Q en R waarvoor de volgende uitspraak waar is:

$$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((Q \vee R) \to \neg P)$$

(8 punten)

Opgave 2.

Zij U een verzameling. Als D een deelverzameling van U is dan schrijven we D^c voor het complement van D in U, dus $D^c = \{u \in U : u \notin D\}$.
Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld tegen elk van de volgende twee uitspraken:

a) Voor alle $A, B \subset U$ geldt:

$$A \subset B^c \Rightarrow B \subset A^c$$

(8 punten)

b) Voor alle $A, B, C \subset U$ geldt:

$$((A \subset B^c) \wedge (B \subset C^c)) \Rightarrow C \subset A^c$$

(7 punten)

Opgave 3.

Gegeven zijn vier recursief gedefinieerde rijen van gehele getallen a, b, c en d. Ze zijn gedefinieerd met behulp van dezelfde recursie-relatie:

$$a_{n+1} = 4a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} - a_{n-3},$$

$$b_{n+1} = 4b_n - 6b_{n-1} + 4b_{n-2} - b_{n-3},$$

$$c_{n+1} = 4c_n - 6c_{n-1} + 4c_{n-2} - c_{n-3},$$

$$d_{n+1} = 4d_n - 6d_{n-1} + 4d_{n-2} - d_{n-3},$$

maar met verschillende beginvoorwaarden:

$$\begin{array}{cccc} a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 1 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 2 & b_3 = 3 \\ c_0 = 0 & c_1 = 1 & c_2 = 4 & c_3 = 9 \\ d_0 = 0 & d_1 = 1 & d_2 = 8 & d_3 = 27 \end{array}$$

a) Bereken voor elk van de vier rijen de volgende drie termen. *(4 punten)*

b) Maak minimaal twee van de volgende 4 deelopgaven. Het aantal punten dat een correcte oplossing waard is, is per deelopgave aangegeven. Echter, als je in totaal ter waarde van meer dan 16 punten aan goede antwoorden geeft, krijg je toch maar 16 punten voor opgave 3b. *(16 punten)*

   I Geef een formule die a_n uitdrukt in termen van n en bewijs deze. *(3 punten)*

   II Geef een formule die b_n uitdrukt in termen van n en bewijs deze. *(5 punten)*

   III Geef een formule die c_n uitdrukt in termen van n en bewijs deze. *(8 punten)*

   IV Geef een formule die d_n uitdrukt in termen van n en bewijs deze. *(11 punten)*

Opgave 4.

Vind alle oplossingen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ van de volgende Diophantische vergelijking:

$$15x + 11y = 80$$

(15 punten)

Opgave 5.

Zij $\mathcal{O} \subset \mathbb{Z}$ de verzameling van oneven getallen en zij $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}$ de verzameling van even getallen. Voor twee gehele getallen $a, b \in \mathbb{Z}$ schrijven we

$$a \sim b \text{ wanneer } \mathrm{ggd}(60, a) = \mathrm{ggd}(15, b)$$

Eerst beschouwen we $\sim$ als een relatie op $\mathcal{O}$.

a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $\mathcal{O}$ *(5 punten)*

b) Hoeveel equivalentieklassen zijn er? Bewijs je antwoord. *(5 punten)*

Vervolgens beschouwen we $\sim$ als een relatie op $\mathcal{E}$.

c) Is $\sim$ een equivalentierelatie op $\mathcal{E}$? Bewijs je antwoord. *(5 punten)*

Tot slot beschouwen we $\sim$ als een relatie op heel $\mathbb{Z}$.

d) Bestaan er $a \in \mathcal{O}$ en $b \in \mathcal{E}$ zodat $a \sim b$? Bewijs je antwoord. *(5 punten)*

Opgave 6.

Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld voor elk van de volgende twee uitspraken.

a) Als $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ een priemgetal is, dan is p een deler van $1 + 2 + \ldots + (p - 1)$. *(9 punten)*

b) Als $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ en p is een deler van $1 + 2 + \ldots + (p - 1)$, dan is p een priemgetal. *(6 punten)*