Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2008-2009 gegeven door Dr. M. Ruijgrok.

Wat is Wiskunde? B (WISB101)
13 januari 2009

Het gebruik van hulpmiddelen (rekenmachine, boek, etc.) is **niet** toegestaan.
Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je aan je antwoord bent gekomen.

Opgave 1.

Bepaal alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van het stelsel congruenties

$$x \equiv 2 \pmod{3},\; x \equiv 47 \pmod{7},\; x \equiv 2 \pmod{37}.$$

(10 punten)

Opgave 2.

Zij f de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 - 2x - 1 & \text{als } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

a) Wat is het beeld $f([0,1])$ van het gesloten interval $[0,1]$ onder f? Wat is het volledig origineel $f^{-1}(f([0,1]))$ van $f([0,1])$ onder f? *(5 punten)*

b) Is f surjectief? Geef een bewijs voor je bewering. *(5 punten)*

c) Zij g de functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \begin{cases} -1 - \sqrt{-y} & \text{als } y \leq 0 \\ \sqrt{1+y} & \text{als } y > 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $f \circ g$ gelijk is aan de identiteit op $\mathbb{R}$, d.w.z. $f \circ g = i_{\mathbb{R}}$, waar de functie $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door $i_{\mathbb{R}}(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R}$. *(5 punten)*

d) Bestaat er een inverse functie voor f? Geef een bewijs voor je bewering. *(5 punten)*

Opgave 3.

Opgave 3. Voor $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, zij $S_q = \{[1], \ldots, [q-1]\}$ de verzameling bestaande uit congruentieklassen modulo q ongelijk aan $[0]$.
Neem nu eerst q gelijk aan 15.

a) Bepaal alle congruentieklassen $[x] \in S_{15}$ die voldoen aan $[x] \odot [4] = [1]$. *(5 punten)*

b) Bepaal alle congruentieklassen $[x] \in S_{15}$ die voldoen aan $[x] \odot [5] = [1]$. *(5 punten)*

In de rest van deze opgave is q een willekeurig natuurlijk getal ongelijk aan 1.
Als $[x] \in S_q$, dan wordt een element $[y] \in S_q$ een **inverse** van $[x]$ genoemd als $[y]$ de eigenschap heeft dat $[x] \odot [y] = [1]$.

c) Stel $[x] \in S_q$. Bewijs dat er ten hoogste één inverse van $[x]$ is. *(5 punten)*

d) Bewijs dat niet ieder element in S_q een inverse heeft als q geen priem is. *(5 punten)*

e) Bewijs dat ieder element in S_q een inverse heeft dan en slechts dan als q priem is. *(5 punten)*

Opgave 4

Zij $f : X \to Y$ een functie van X naar Y. Ter herinnering: als Z een verzameling is en B is een deelverzameling van Z, dan is de verzameling $Z \setminus B$ per definitie gelijk aan $\{z \in Z : z \notin B\}$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld voor ieder van de volgende drie beweringen.

a) Voor alle deelverzamelingen A van X geldt

$$f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A) \quad \text{of} \quad f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A).$$

(5 punten)

b) Als f **surjectief** is, dan geldt voor alle deelverzamelingen A van X dat

$$f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A) \quad \text{of} \quad f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A).$$

(5 punten)

c) Als f **injectief** is, dan geldt voor alle deelverzamelingen A van X dat

$$f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A) \quad \text{of} \quad f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A).$$

(5 punten)

Opgave 5.

Zij $f : X \to X$ een functie van X naar X. Definieer nu X_n met behulp van recursie voor $n \in \mathbb{N}$ door $X_1 = X$ en $X_{k+1} = f(X_k)$ voor $k \geq 1$. Definieer vervolgens de deelverzameling A van X door

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

a) Bewijs dat het beeld $f(A)$ van A onder f een deelverzameling is van A. *(4 punten)*

b) Zij $\phi : A \to A$ de functie $x \mapsto f(x)$. (N.B.: ϕ is goed gedefinieerd vanwege onderdeel (a).) Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld voor de volgende twee beweringen. *(6 punten)*

   (i) Als f **injectief** is, dan is ϕ **surjectief**.

   (ii) Als f **surjectief** is, dan is ϕ **injectief**.

Opgave 6.

Zij A de deelverzameling van elementen uit het gesloten interval $[0, 1]$ waarvoor er een decimale ontwikkeling bestaat zodanig dat de som van de decimalen gelijk is aan 17. (Een voorbeeld van een element uit A is $x = \frac{89}{100}$. Dit element x heeft twee decimale ontwikkelingen, namelijk $x = 0,89000\ldots$ en $x = 0,88999\ldots$. De som van de decimalen van de eerste ontwikkeling is gelijk aan $8 + 9 = 17$ en dus $x \in A$.)

a) Bewijs dat de elementen van A rationale getallen zijn en dat A aftelbaar is. *(8 punten)*

Zij B de deelverzameling van elementen uit het gesloten interval $[0, 1]$ waarvoor er een decimale ontwikkeling bestaat zodanig dat de som van de decimalen **eindig** is.

b) Zij f de functie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto 10^{-n}$. Bewijs dat het beeld $\mathrm{Im}(f)$ van f een deelverzameling is van B. *(4 punten)*

c) Bewijs dat B dezelfde cardinaliteit heeft als $\mathbb{Q}$. *(8 punten)*