Uitwerking hertentamen Analyse A

31 mei 2011, 9:00 – 12:00 uur

De hieronder gegeven uitwerkingen moeten worden opgevat als voorbeelden van correcte oplossingen. In veel gevallen zijn andere correcte oplossingen mogelijk.

Opgave 1

(a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zo dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta_1 \Rightarrow y \geq -\frac{3}{2}.$$

(b) Bewijs dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta_1$ geldt dat

$$\left|\frac{x+1}{y+2} - 2\right| \leq 2|x-1| + 4|y+1|.$$

(c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+1}{y+2} = 2.$$

Uitwerking

(a) Laat $\delta_1 = 1/2$. Als $\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta_1$, dan geldt ook $|y - (-1)| < 1/2$, dus $y \in]-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}[=]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, dus $y > -3/2$.

(b) Veronderstel dat $\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta_1\|$. Dan geldt volgens (a) dat $y > -3/2$, dus $2 - y \geq 1/2$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+1}{y+2} - 2\right| &= \left|\frac{x+1}{y+2} - \frac{2y+4}{y+2}\right| = \frac{|x-2y-3|}{y-2|} \leq 2|x-2y-3| \\ &= 2|(x-1) - (2y+2)| \leq 2|x-1| + 4|y+1|.\end{aligned}$$

(c) Zij $\epsilon > 0$. Kies $\delta = \min(\delta_1, \epsilon/7)$. Dan geldt voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta$ dat $|x-1| < \delta$, $|y+1| \leq \delta$ en $\|(x, y) - (1, -1)\| < \delta_1$, dus wegens het bovenstaande:

$$\left|\frac{x+1}{y+2} - 2\right| \leq 2|x-1| + 4|y+1| \leq 6\delta < \frac{6\epsilon}{7} < \epsilon.$$

Hieruit volgt het gestelde.

z.o.z.

Opgave 2 In deze opgave mag je de volgende eigenschappen gebruiken van de functies $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) cos en sin zijn differentieerbaar, en er geldt $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, en $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$, voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|\cos x| \le 1$ en $|\sin x| \le 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\cos 2k\pi = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x = 0; \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{als} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bepaal de afgeleide functie f'.

(c) Is de afgeleide functie continu? Bewijs de juistheid van je bewering.

Uitwerking

(a) Zij $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan volgt uit eigenschap (ii) dat $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \le 1$, dus

$$0 \le \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = |x||\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \le |x|.$$

Nu is $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, dus met de insluitstelling volgt dat

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = 0$$

dus ook

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Hieruit volgt per definitie dat f differentieerbaar is in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

(b) De functie $x \mapsto 1/x$ is differentieerbaar op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ met afgeleide

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Met behulp van de kettingregel volgt nu dat de functie $x \mapsto \sin(1/x)$ differentieerbaar is op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ met afgeleide

$$\frac{d}{dx}\sin(1/x) = -\frac{1}{x^2}\cos(1/x).$$

Met behulp van de productregel volgt nu dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ met afgeleide

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), \qquad (x \neq 0). \qquad (*)$$

De afgeleide functie wordt hierdoor en door (a) gegeven.

(c) De afgeleide is niet continu in 0. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat de afgeleide continu zou zijn in 0. Dan zou gelden

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0.$$

Uit $|x \sin(1/x)| \leq |x|$ volgt met de insluitstelling dat

$$\lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Combineren we dit met (*), dan vinden we met de somregel voor limieten dat

$$\lim_{x\to 0} \cos(1/x) = \lim_{x\to 0} \big(2x \sin(1/x) - f'(x)\big) = 0.$$

Uit de definitie van limiet volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \neq 0$ met $|x| < \delta$ geldt $|\cos(1/x)| < \frac{1}{2}$. Kies k zo dat $x_0 := 2k\pi > 1/\delta$. Dan is $0 < 1/x_0 < \delta$, maar $\cos(1/x_0) = 1$, tegenspraak.

Opgave 3 We beschouwen de verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \ \text{ en } \ x > 0\}.$$

(a) Bewijs dat V onbegrensd is.

(b) Bewijs dat V gesloten is.

(c) Laat $(a, b) \in V$ een punt zijn met $ab = 1$. Toon aan dat (a, b) geen inwendig punt van V is.

Uitwerking

(a) Veronderstel dat V begrensd zou zijn. Dan is er een $R > 0$ zo dat $\|(x, y)\| \leq R$ voor alle $(x, y) \in V$. Zij $(x, y) = (R + 1, (R + 1)^{-1}$. Dan is $x > 0$ en $xy = 1 \geq 1$, dus $(x, y) \in V$, maar tegelijkertijd is $\|(x, y)\| \geq R + 1 > R$, tegenspraak.

(b) Voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $xy \geq 1$ geldt dat $x \neq 0$. Dus is $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ en} x \geq 0\}$. Definieer de functies $F, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x, y) = xy - 1$ en $g(x, y) = x$. Dan zijn f, g continu, en $V = f^{-1}([0, \infty[\,) \cap g^{-1}([0, \infty\,[)$. Aangezien $[0, \infty\,[$ gesloten is in $\mathbb{R}$, volgt dat V de doorsnede van twee gesloten verzamelingen is, dus gesloten.

(c) Zij $\delta > 0$ willekeurig. We zullen aantonen dat $B((a, b)); \delta)$ niet geheel in V kan liggen. Hiertoe merken we op dat uit $a \geq 0$ en $ab = 1$ volgt dat $a > 0$ en $b > 0$. Het punt $p := (a - \delta/2, b)$ ligt in de bol, terwijl $(a - \delta/2)b = 1 - b\delta/2 < 1$. Dus $p \notin V$.

Opgave 4 We beschouwen de functie $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

(a) Toon aan dat voor elke $x \in [0, 1[$ geldt dat

$$f(x) \geq \frac{1}{1-x} - 1.$$

(b) Toon aan dat er voor elke $R > 0$ een $x \in [0, 1[$ bestaat zo dat $f(x) \geq R$.

(c) Bewijs dat $f([0, 1[) = [0, \infty[$.

Uitwerking

(a) Zij $x \in [0, , 1[$. Dan is $0 < 1 - x^2 \leq 1 + x^2$, dus $0 \leq (1 - x^2)(1 + x^2)^{-1} \leq 1$. Hieruit volgt dat $-(1 - x^2)(1 + x^2)^{-1} \geq -1$, dus

$$f(x) \geq \frac{1}{1-x} - 1.$$

(b) Laat $R > 0$. Dan is $0 < (R + 1)^{-1} < 1$. Kies$x = 1 - (R + 1)^{-1}$. Dan is $x \in]0, 1[$, en

$$f(x) \geq \frac{1}{1-x} - 1 = R.$$

(c) Voor alle $x \in [0, 1[$ geldt $0 < (1 - x) \leq 1$, dus wegens (a) geldt $f(x) \geq \frac{1}{1-x} - 1 \geq 1 - 1 = 0$. Dus $f([0, 1[\,) \subset [0, \infty[$. Er geldt $0 = f(0)$. Zij $y \in [0, \infty[$. Volgens (b) bestaat er een $x \in [0, 1[$ zo dat $f(x) > y$. Aangezien f een rationele functie is, dus continu, volgt hieruit met de tussenwaardestelling dat er een $\xi \in [0, x]$ bestaat zo dat $f(\xi) = y$. Dus $f([0, 1[\,) \subset [0, \infty[$. Hiermee is het bewijs voltooid.

Opgave 5 We beschouwen een rij deelverzamelingen $V_n \subset \mathbb{R}$, voor $n \in \mathbb{N}$, met de eigenschap dat $V_0 \neq \emptyset$, en $V_n \subset V_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Gegeven is verder dat de verzameling

$$V := \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

naar boven begrensd is.

(a) Toon aan dat voor elke n het supremum $s_n = \sup V_n$ bestaat.

(b) Bewijs dat de rij $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotoon stijgend is.

(c) Bewijs dat de rij $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert en dat zijn limiet gelijk is aan het supremum van V.

Uitwerking

(a) De verzameling V_n is deel van de naar boven begrensde V, dus zelf naar boven begrensd. Ook bevat V_n de niet-lege verzameling V_0, dus V_n is een niet-leeg deel van $\mathbb{R}$. We concluderen dat $s_n = \sup V_n$ bestaat.

(b) Zij $n \in \mathbb{N}$. Aangezien s_{n+1} bovengrens van V_{n+1} is en $V_n \subset V_{n+1}$, is s_{n+1} ook bovengrens van V_n, dus $s_{n+1} \geq s_n$.

(c) De verzameling V is niet-leeg en naar boven begrensd, en heeft dus een supremum s. Uit $V_n \subset V$ volgt dat $s_n \leq s$. De rij (s_n) is derhalve naar boven begrensd, met limiet $\lambda \leq s$. We merken op dat $\lambda \geq s_n$ voor alle n, dus λ is een bovengrens van V_n, voor elke n. Voor elke n geldt $V_n \subset] - \infty, \lambda]$, dus ook $V \subset] - \infty, \lambda]$, en we zien dat λ een bovengrens van V is. Dus $\lambda \geq s$.