Uitwerking tentamen Analyse A

21 april 2011, 13:30 – 16:30 uur

De hieronder gegeven uitwerkingen moeten worden opgevat als voorbeelden van correcte oplossingen. In veel gevallen zijn andere correcte oplossingen mogelijk.

Opgave 1

(a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zo dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta_1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Bewijs dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta_1$ geldt dat

$$\left|\frac{y}{x} - 2\right| \leq 2(|y - 2| + 2|x - 1|).$$

(c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x} = 2.$$

Uitwerking

(a) Kies $\delta_1 = 1/2$. Laat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voldoen aan $\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta_1$. Dan is $|x - 1| \leq \|(x, y) - (1, 2)\| < \frac{1}{2}$, dus $x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, dus $x \geq \frac{1}{2}$.

(b) Laat $\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta_1$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y}{x} - 2\right| &= \left|\frac{y - 2x}{x}\right| \leq 2|y - 2x| \\
&= 2|((y - 2) - 2(x - 1)| \\
&\leq 2(|y - 2| + 2|x - 1|).
\end{aligned}$$

(c) Zij $\epsilon > 0$. Kies $\delta = \min(\delta_1, \epsilon/7)$. Veronderstel dat $\|(x, y) - (1, 2)\| < \delta$. Dan geldt wegens (b) dat

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y}{x} - 2\right| &\leq 2(|y - 2| + 2|x - 1|) \\
&< 2\left(\frac{\epsilon}{7} + \frac{2\epsilon}{7}\right) = \frac{6\epsilon}{7} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Opgave 2 Bepaal de volgende limieten. Vergeet niet daarbij expliciet aan te geven welke rekenregels u gebruikt. U mag gebruiken dat de functie $x \mapsto \sqrt{x}$, $[0, \infty[\to \mathbb{R}$, continu is.

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2 + 4n)^2}{2 + 4n^2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x + 1} - 1}.$$

z.o.z.

Uitwerking

(a) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{(2+4n)^2}{2+4n^2} = \frac{(\frac{2}{n}+4)^2}{\frac{2}{n^2}+4}.$$

Nu is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dus ook $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2.0 = 0$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Met de somregel en de produktregel concluderen we dat

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{n}+4)^2 = (0+4)(0+4) = 16, \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2}+4\right) = 0+4 = 4.$$

Met de quotientregel concluderen we tenslotte dat de gevraagde limiet gelijk is aan $16/4 = 4$.

(b) Voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ geldt dat

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\sin x}{x}(\sqrt{x+1}+1).$$

We merken op dat $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Verder is $\lim_{x\to 0}(x+1) = 0+1 = 1$, en wegens de continuiteit van de wortelfunctie in 1 geldt

$$\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1.$$

Met de substitutie regel zien we dat

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1} = 1,$$

en met de somregel dat $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = 2$.

Met de produktregel zien we tenslotte dat de gevraagde limiet gelijk is aan 2.

Opgave 3 We beschouwen een verzameling V en definiëren de afbeelding $d : V \times V \to \mathbb{R}$ door

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x = y \\ 1 & \text{als} \quad x \neq y. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat d een afstand op V is.

Hiermee is (V, d) een metrische ruimte.

(b) Laat $p \in V$. Toon aan dat de verzameling $\{p\}$ open is in V.

(c) Toon dat iedere deelverzameling $A \subset V$ gesloten is.

Uitwerking

(a) Uit de definitie volgt direct dat $d(x, y) \geq 0$ voor alle $x, y \in V$ en dat $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Uit de definitie volgt ook direct dat $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in V$. Tenslotte tonen we de driehoeksongelijkheid voor d aan. Laat $x, y, z \in V$. Als $x = z$, dan volgt dat

$$d(x, z) = 0 \leq 0 + 0 \leq d(xc, y) + d(y, z),$$

dus is aan de driehoeksongelijkheid voldaan. Veronderstel nu dat $x \neq z$. Dan is $x \neq y$ of $z \neq y$. In alle gevallen is $d(x, y) + d(y, z) \geq 1$. Dus

$$d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z).$$

We concluderen dat d een afstand op V is.

(b) Kies $\delta = 1/2$, dan is $B(p; \delta) = \{p\} \subset \{p\}$. Dus p is een inwendig punt van $\{p\}$. Hieruit volgt dat ieder punt van $\{p\}$ inwendig is, dus $\{p\}$ is open.

(c) Laat $A \subset V$. Het complement $B = V \setminus A$ is de vereniging van de verzamelingen $\{p\}$, voor $p \in B$. Iedere verzameling in deze vereniging is open, dus B is open. Hieruit volgt dat A gesloten is.

Opgave 4 We beschouwen de functie $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

(a) Toon aan dat de functie f monotoon strikt stijgend is, dwz., voor alle $x, y \geq 0$ geldt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(b) Toon aan dat voor alle $\epsilon > 0$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $f(n) > 1 - \epsilon$.

(c) Bewijs dat f een bijectie is van $[0, \infty[$ op $[0, 1[$.

Uitwerking

(a) Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $0 \leq x < y$ geldt dat $1 + x > 0$ en $1 + y > 0$. Er volgt dus

$$x(1 + y) = x + xy < y + xy = y(1 + x),$$

en door deling van beide leden door het positieve getal $(1 + x)(1 + y)$ concluderen we dat $f(x) < f(y)$. Dit bewijst de strikte monotonie.

(b) Er geldt dat $f(n) = n/(n + 1) = 1 - \frac{1}{n}$. Voor $n > \frac{1}{\epsilon}$ geldt dus $f(n) > 1 - \epsilon$.

(c) Voor alle $x \geq 0$ geldt $1 + x > x$, dus

$$0 \leq f(x) = \frac{x}{1 + x} < 1.$$

We concluderen dat $f([0, \infty[) \subset [0, 1[$. Uit de strikte monotonie van f volgt direct dat f injectief is.

We tonen de surjectiviteit van f als volgt aan. Laat $\xi \in [0, 1[$. Schrijf $\epsilon = 1 - \xi$. Dan $\epsilon > 0$. Wegens (b) bestaat een n zo dat $f(n) > 1 - \epsilon = \xi$. Nu geldt dat

$$0 \leq \xi \leq f(n).$$

De functie f is continu, dus wegens de tussenwaardestelling bestaat een $x \in [0, n]$ met $f(x) = \xi$. De afbeelding f is dus surjectief op $[0, 1[$. Het bewijs is voltooid.

Opgave 5 We beschouwen een continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. In het vervolg veronderstellen we dat $f([0, 1])$ niet naar boven begrensd is. Dit zal tot een tegenspraak leiden.

(a) Toon aan dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat de verzameling

$$A_n := \{x \in [0, 1] \ \mid f(x) \geq n\}$$

een supremum heeft. We noemen dit supremum s_n.

(b) Laat zien dat $f(s_n) \geq n$.

(c) Toon aan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: s_n is een bovengrens van A_{n+1}.

(d) Toon aan dat de rij $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een limiet s heeft.

(e) Leidt een tegenspraak af.

We concluderen dat iedere continue functie $[0, 1] \to \mathbb{R}$ naar boven begrensd is.

Uitwerking

(a) Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan is n geen bovengrens van $f([0, 1])$ dus er bestaat een $x \in [0, 1]$ met $f(x) > n$. We concluderen dat $x \in A_n$. Dus A_n is niet-leeg en naar boven begrensd en heeft derhalve een supremum, s_n.

Voor later gebruik merken we vast op $0 \leq x \leq s_n$. Verder is 1 een bovengrens van A_n, dus $s_n \leq 1$ en we zien dat $s_n \in [0, 1]$.

(b) De functie f is continu, en $[n, \infty[$ is gesloten in $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat $A_n = f^{-1}([n, \infty[)$ gesloten in $[0, 1]$ is. Het punt $s_n \in [0, 1]$ is limietpunt van A_n, dus behoort tot A_n. Hieruit volgt $f(s_n) \geq n$.

(c) Zij $n \in \mathbb{N}$. Voor $x \in A_{n+1}$ geldt dat $f(x) \geq n + 1 \geq n$, dus $x \in A_n$, en we zien dat $s_n \geq x$. Derhalve is s_n een bovengrens van A_{n+1}.

(d) Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan is s_n een bovengrens van A_{n+1}, dus groter dan of gelijk aan de kleinste bovengrens van A_{n+1}, en we zien dat $s_n \geq \sup A_{n+1} = s_{n+1}$. Hieruit blijkt dat de rij (s_n) monotoon dalend en naar onderen begrensd is (door 0), dus convergent. De rij heeft dus een limiet s.

(e) Uit de continuiteit van f volgt dat $\lim_{x \to s} f(x) = f(s)$. Met de substitutiestelling volgt dus $\lim_{n \to \infty} f(s_n) = f(s)$. Er bestaat dus een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|f(s_n) - f(s)| < 1$, dus $f(s_n) < f(s) + 1$. Voor alle $n \geq N$ geldt dus ook

$$n \leq f(s_n) < f(s) + 1.$$

Dit is een tegenspraak.