Eerste deeltentamen Inleiding Analyse
17 april 2008, 14:00 – 17:00.

- Schrijf op ieder vel je naam, en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkcollegeleider (Groep 1 = Bram Arens, Groep 2 = Alex Boer, Groep 3 = Luuk Hoevenaars, Greop 4 = Andor Lukacs), of eventueel "geen werkcollege," en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent. Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je het resultaat toch bij de volgende onderdelen gebruiken!
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vijf opgaven tellen voor 20 punten. De bonusopgave levert 10 extra punten op. Wie 80 of meer punten behaalt, heeft een 10. N.B. Hogere cijfers worden niet gegeven.

Succes !

1. We voorzien $\mathbb{R}^n$ van de norm $||(x_1, x_2, \ldots x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ en de bijbehorende metriek. We kiezen $a \in \mathbb{R}^n$ zodat $a \neq 0$.

   a. Leid uit de driehoeksongelijkheid af dat voor alle elementen $x, y \in \mathbb{R}^n$ geldt $||x - y|| \geq |\ ||x|| - ||y||\ |$.

   b. Bewijs dat voor een geschikte $\delta > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ met $||x - a|| < \delta$ geldt $||x|| \geq \frac{1}{2}||a||$.

   c. Bewijs nu met de limietdefinitie dat
   $$\lim_{x \to a} \frac{1}{||x||} = \frac{1}{||a||}.$$

2. Voor $x \in \mathbb{R}$ noteren we met $[x]$ het grootste gehele getal $\leq x$.

   a. Bewijs uit de definitie van limiet dat $\lim_{x \to 1}[x]$ niet bestaat.

   b. We definiëren $f : [-1, 2) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = x[x]$. Ga na in welke punten in zijn domein f continu is, en waar f niet continu is. Bewijs je beweringen (hoeft niet met de limietdefinitie).

   c. Is f differentieerbaar in 0? Zo ja, waarom; zo nee, waarom niet?

Z.O.Z !!!!!

3. Stel $V \subset \mathbb{R}^2$, $W \subset \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door
   $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$,
   $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 1\}$.

   a. Bewijs dat V open is in $\mathbb{R}^2$.
   b. Bewijs dat W gesloten is in V.
   c. Is W gesloten in $\mathbb{R}^2$? Waarom wel of waarom niet?
   d. Is W open in $\mathbb{R}^2$? Waarom wel of waarom niet?

4. Kies $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en stel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is een monotoon stijgende functie met $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$.

   De verzamelingen $X \subset [a, b]$ en $Y \subset [a, b]$ worden gedefinieerd door
   $X = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$, en $Y = \{y \in [a, b] \mid f(y) > 0\}$.

   a. Bewijs dat X en Y niet leeg en begrensd zijn. Bepaal het infimum van X en het supremum van Y, en bewijs je beweringen.
   b. Noem p het supremum van X en noem q het infimum van Y. Laat zien $p \leq q$. Aanwijzing: Bewijs eerst dat als $a \leq x < p$ dan $f(x) < 0$, en als $b \geq y > q$ dan $f(y) > 0$.
   c. Stel $p \neq q$. Laat zien dat f een nulpunt heeft op $[a, b]$.
   d. Stel f heeft geen nulpunt op $[a, b]$. Laat zien dat f niet continu is in p.

5. We definieren de volgende functie d op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

   Voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $d(a, a) = 0$. Als $a, b \in \mathbb{Z}$ met $a \neq b$ en $a - b$ bevat precies r factoren 2 in de eenduidige ontbinding in priemfactoren, dan definiëren we $d(a, b) = \frac{1}{r+1}$. Dus bijvoorbeeld $d(3, 6) = 1$, $d(3, 7) = \frac{1}{3}$.
   Laat $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$ (d.w.z. de natuurlijke getallen zonder 0).

   a. Bewijs dat d een metriek is op $\mathbb{Z}$.
   b. Construeer een rij a_n in A met
      $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in $\mathbb{Z}$ met metriek d.
   c. Bepaal de afsluiting van A in $\mathbb{Z}$ met metriek d, en bewijs dat je resultaat correct is.
   d. Doe opgave c. opnieuw voor $\mathbb{Z}$ met de gewone metriek (afstand tussen a en b is $|a - b|$).

6. Bonusopgave: Zij V een metrische ruimte met metriek d, en kies $a, p \in V$ met $a \neq p$. Bewijs uit de definitie van limiet dat
   $\lim_{x\to a} \frac{1}{d(x,p)} = \frac{1}{d(a,p)}$. (Vergelijk met opgave 1)