Tentamen inleiding analyse 18 juni 2009

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Jan-Jaap Oosterwijk, Esther Bod, Charlene Kalle of David Carchedi).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Elke van de 8 (deel)opgaven telt even zwaar.
- *SUCCES!*

1. We noteren met

$$R^1[0,1] \quad := \quad \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ integreerbaar} \right\}$$

de reële lineaire ruimte van alle over $[0,1]$ Riemann-integreerbare functies. Tevens definiëren we d.m.v.

$$\|f\| \quad := \quad \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

een afbeelding $\|..\| \,:\, R^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die ook de integraalnorm wordt genoemd.

(*a*) Verifieer dat de restrictie van $\|..\|$ tot de deelruimte $C[0,1]$ van continue functies aan alle eigenschappen van een norm voldoet, d.w.z.

(*i*) $\|f\| \geq 0$ voor alle $f \in C[0,1]$.
(*ii*) $\|f\| = 0$ dan en slechts dan als f de nulfunctie is.
(*iii*) $\|\lambda f\| = |\lambda|\, \|f\|$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $f \in C[0,1]$.
(*iv*) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ voor alle $f, g \in C[0,1]$.

(b) Zoals elke norm op een lineaire ruimte maakt de integraalnorm van $C[0,1]$ d.m.v. $\mathrm{d}(f,g) := \|f-g\|$ een metrische ruimte. Bereken de hierdoor gedefinieerde afstand tussen de functies $\sin 2\pi x$ en $\cos 2\pi x$, en geef een interpretatie voor dit getal. *Hint:* maak een schets.

(c) Ga na dat de functies $(f_n)_{n\geq 2}$ met

$$f_n(x) \quad := \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{als} \quad x > \frac{1}{n} \\ \sqrt{n} & \phantom{\text{als}} \quad x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

een Cauchy-rij in $C[0,1]$ vormen.

(d) Laat zien dat er geen Riemann-integreerbare functie $g \in R^1[0,1]$ bestaat waarvoor geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$ en concludeer dat $(C[0,1], \|..\|)$ niet volledig is.

2. In deze opgave is voor alle functies $f, g, h : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ de oorsprong 0 een inwendig punt van het domein. Zij $h : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$. Dan schrijven we $h = \mathcal{O}(x^k)$ indien er een open interval $I \subset \mathrm{Dom}(h)$ met $0 \in I$ en een constante $C > 0$ bestaan met de eigenschap dat voor alle $x \in I$ de afschatting $|h(x)| \leq C\,|x|^k$ geldt, en $h = o(x^k)$ indien $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{|x|^k} = 0$.

   (a) Laat zien dat voor elk $k \in \mathbb{N}_0$ geldt dat als $h = o(x^k)$ dan $h = \mathcal{O}(x^k)$, en als $h = \mathcal{O}(x^k)$ dan $h = o(x^{k-1})$.

   (b) Bewijs dat $g : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ met $g = o(x^1)$ differentieerbaar in $x = 0$ is. Bereken de afgeleides $g^{(k)}(0)$, $k = 0,1,\ldots,m$ onder de extra voorwaarde dat $g = o(x^m)$ en $m-1$ keer differentieerbaar is.

   (c) Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ een $(n+1)$-keer differentieerbare functie met $f = o(x^n)$ en continue $(n+1)$ste afgeleide $f^{(n+1)}$. Toon aan dat dan zelfs $f = \mathcal{O}(x^{n+1})$ is.

3. Zij $a < b \in \mathbb{R}$ en $I := [a,b]$ een gesloten en begrensd interval, verder $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ een monotone functie (d.w.z. f is monotoon stijgend of monotoon dalend). Bewijs dat f over I Riemann-integreerbaar is of geef een tegenvoorbeeld.