Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2002/2003 gegeven door Dr. E.P. van den Ban.

Inleiding Analyse A (WISB111)
6 mei 2003

- Schrijf op ieder vel **uw naam**, en bovendien op het eerste vel uw **studentnummer**, de naam van uw practicumleider (Barbara van den Berg, Benno van den Berg, Bob Rink) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeldt dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1.

(a) Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x-3| \leq 1$ geldt

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\right| \leq \frac{1}{36}(|x|+3)|x-3|.$$

(b) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}.$$

Opgave 2. Bereken de volgende limieten:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{n^2+2}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}.$$

Geef daarbij precies aan welke rekenregels u gebruikt.

Opgave 3. We beschouwen de verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $x \geq y$.

(a) Bewijs dat A een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

(b) Is de verzameling $B := A \setminus \{(0,0)\}$ gesloten in $\mathbb{R}^2$? Bewijs de juistheid van uw bewering.

Opgave 4. We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 1$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n^{-2}}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \leq a_{n+1}$.

(b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niet naar boven begrensd is.

Opgave 5. Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een tweetal deelverzamelingen $A, B \subset V$.

(a) Geef de definitie van een inwendig punt van de verzameling A en geef ook de definitie van A^{inw}.

(b) Gegeven is een punt $p \in V$. Bewijs dat:

$$p \in (A \cap B)^{\text{inw}} \iff p \in A^{\text{inw}} \text{ en } p \in B^{\text{inw}}.$$

(c) Geef een voorbeeld van een collectie deelverzamelingen $A_n \subset \mathbb{R}$, voor $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, met de eigenschap dat

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n^{\text{inw}} \neq \Big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\Big)^{\text{inw}}.$$

Vergeet niet daarbij aan te tonen dat uw voorbeeld de genoemde eigenschap heeft.