Tentamen Analyse 1A

28 feb 2002, 9:00 - 12:00 uur

MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE ANA1A WERD IN 2001/2002 GEGEVEN DOOR E. VAN DE BAN.

Inleiding Analyse 1A (ANA1a)
28 februari 2002

- Schrijf op ieder vel **uw naam**, en bovendien op het eerste vel uw **studentnummer**, de naam van uw practicumleider (Johan van de Leur, Corrie Quant, Luc Vrancken) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

(a) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ met $x \leq 1$ geldt

$$\left|\frac{1+x}{2-x} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}|x|.$$

(b) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x}{2-x} = \frac{1}{2}$.

Opgave 2

Bereken de volgende limieten

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{1-2x} - x\sin(2/x)\right], \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-100n}{1-2n^3}.$$

Geef bij zowel (a) als (b) duidelijk aan welke rekenregels voor limieten u gebruikt.

Opgave 3

We beschouwen de deelverzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1 \text{ en } x \geq 0\}.$$

(a) Schets de verzameling V.

(b) Bewijs dat V gesloten is in $\mathbb{R}^2$.

(c) Bepaal het inwendige van V in $\mathbb{R}^2$. Hierbij mag u volstaan met het geven van een antwoord, er wordt geen bewijs verlangd.

Opgave 4

Gegeven is een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu is in 0. We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = |x|g(x)$, voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs de juistheid van de volgende uitspraken.

(a) Als $g(0) = 0$, dan is f differentieerbaar in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

(b) Als $g(0) = 1$, dan is f niet differentieerbaar in 0.

Opgave 5

Gegeven zijn een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

(a) Geef de definitie van een verdichtingspunt van A; geef ook de definitie van $\overline{A}$ (de afsluiting van A).

(b) Geef de definitie van een inwendig punt van A; geef ook de definitie van $\operatorname{inw} A$ (het inwendige van A).

Laat verder $(a_n)_{n\geq 1}$ een rij punten in V zijn die convergeert met limiet $a \in V$. Gegeven is dat $a_n \in A$ voor elk even getal $n \in \mathbb{N}$, terwijl $a_n \notin A$ voor elke oneven $n \in \mathbb{N}$.

(c) Toon aan dat $a \in \overline{A}$.

(d) Toon aan dat $a \notin \operatorname{inw} A$.