Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2003/2004 gegeven door Erik van den Ban.
Het tentamen is samengesteld/gemaakt door Jaap Eldering (en omgezet in LaTeX door Wouter Duivesteijn).

Inleiding Analyse (WISB111)
13 april 2004

- Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zodat

$$\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_1 \Rightarrow y \geq 1$$

Uitwerking:
Neem $\delta_1 = 1$.
Dan $\|(x,y)-(1,2)\| < 1$.
Dus $|y-2| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < 1$.
Dus $y \geq 1$.

b) Zij $\delta_1 > 0$ als in (a). Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_1$ geldt:

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right| \leq |x-1| + \tfrac{1}{2}|y-2|$$

Uitwerking:
$\left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-y}{2y}\right| \leq \frac{1}{2}|2x-y|$
$= \frac{1}{2}|2(x-1)-(y-2)| \leq |x-1| + \frac{1}{2}|y-2|$

c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Uitwerking:
$\epsilon > 0$ gegeven, neem $\delta := \min(\frac{\epsilon}{2}, 1)$, dan $y \geq 1$ en

$$\left|\frac{x}{y}-\tfrac{1}{2}\right| \leq |x-1| + \tfrac{1}{2}|y-2| < \frac{3}{2}\delta \leq \epsilon$$

Opgave 2

Bereken de volgende limieten:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$$

Geef daarbij precies aan welke rekenregels u gebruikt.

Uitwerking:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \left(\text{begrensd door} \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\text{dus } \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 = \lim_{n\to\infty 1+\frac{1}{n^2}}$$
$$\text{dus } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}\frac{1}{x-1} = 1 \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Opgave 3

We beschouwen de verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 - y^2 > 1$ en $x > 0$.

a) Bewijs dat U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.
Uitwerking:
Zij $f(x, y) = x^2 - y^2$, en $g(x, y) = x$. Dan $U = f^{-1}(]1, \infty[) \cap g^{-1}(]1, \infty[)$. Aangezien U een volledig origineel is, is U open.

b) Bewijs dat de verzameling $L := \{(x, 0)|x > 1\}$ gesloten is in U.
Uitwerking:
Zij $L' = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$.
Dan $L = L' \cap U$, want $(x, 0) \in L'$, $x \in L : x^2 - y^2 = x^2 > 1$ en $x > 1$, dus $x > 1$.
L' is gesloten in $\mathbb{R}$, dus $L = L' \cap U$ is gesloten in U.

c) Bepaal de afsluiting $\bar{U}$ van de verzameling U. In dit onderdeel wordt geen bewijs verlangd.
Uitwerking:

$$\bar{U} = \{(x, y)|x^2 - y^2 \geq 1, x \geq 0\}$$

Stel $(x, y) : \quad x^2 - y^2 = 1 - \epsilon < 1$.
Dan $\forall_{p\in\bar{U}} : \quad \exists_{\delta>0} : \quad (x, y) \notin B(p, \delta)$, want f continu. Dus $(x, y) \notin \bar{U}$.
Stel nu $(x, y) : \quad x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$.
Dan $\forall_{\delta>0} : \quad (x + \frac{\delta}{2}, y) \in U$. Dus $(x, y) \in \bar{U}$.
Dus $\bar{U} = \{(x, y)|x^2 - y^2 \geq 1, x \geq 0\}$.

Opgave 4

We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + \frac{5}{a_n})$$

a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sqrt{5} \leq a_{n+1} \leq a_n$.
Uitwerking:
We zullen gebruiken dat $\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$, dus moeten we dat bewijzen:
$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad (a + b)^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow$
$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 \geq 0$, wat triviaal is.
Nu kunnen we het gevraagde gaan bewijzen:

Stel $a_n > 0$.
Dan $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$.
Vanwege de zojuist bewezen stelling is dit $\geq \sqrt{a_n \cdot \frac{5}{a_n}} = \sqrt{5}$.
Dus $a_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{5}{a_n}\right) \leq a_n \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{a_n} \leq \tfrac{1}{2} a_n \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \leq {a_n}^2, \text{ wat waar is, want } a_n \geq \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Kortom: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sqrt{5} \leq a_{n+1} \leq a_n$.

b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert.
Uitwerking:
De rij is begrensd en monotoon dalend, dus hij heeft een limiet, dus hij convergeert.

c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Uitwerking:
$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \text{ (want continu)}$$
$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \Rightarrow a = \pm\sqrt{5} \Rightarrow a = +\sqrt{5}$ (want $a_n \geq \sqrt{5}$).

Opgave 5

Zij (V, d) een metrische ruimte, A een deelverzameling van V, en $r > 0$ een positief reëel getal. We definiëren B_r als de verzameling van punten $x \in V$ waarvoor een punt $a \in A$ bestaat zodat $d(x, a) < r$.

a) Zij $p \in B_r$. Geef de definitie van 'p is een inwendig punt van B_r'.
Uitwerking:
$\exists_{\delta > 0}: \quad B_r(p, \delta) \subseteq B_r$

b) Toon aan dat de verzameling B_r open in V is.
Uitwerking:
Stel $p \in B_r$, dan $\exists_{x \in A}: \quad d(x, p) = r' < r$.
Neem $\delta := r - r' > 0$.
Dan $B(p, \delta) \subseteq B_r$, want:
stel $q \in B(p, \delta)$,
dan $d(q, x) \leq d(q, p) + d(p, x) < \delta + r' = (r - r') + r' = r$, dus $q \in B_r$

We definiëren C_r als de verzameling van punten $x \in V$ met de eigenschap dat $d(x, a) \geq r$ voor alle $x \in A$.

c) Bewijs dat de verzameling C_r gesloten is in V.
Uitwerking:
$B_r = \{p \in V | \exists_{x \in A}: \quad d(x, p) < r\}$
$(B_r)^c = \{p \in V | \forall_{x \in A}: \quad d(x, p) \geq r\} = C_r$
B_r is open, dus $C_r = (B_r)^c$ is gesloten.