Uitwerking eerste deeltentamen Inleiding Analyse, 16 april 2009

Opgave 1 [20pt]

Bereken

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin^2 x}$;

Het is bekend dat $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ en $\cos x = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} .$$

De substitutie $y = x - \frac{\pi}{2}$ geeft dan

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\sin^2 y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 = \left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1,$$

omdat de functie $z \mapsto z^2$ continu is en $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$.

Er geldt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

De functie

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

is continu in $x = 0$, omdat

- de functie $x \mapsto 1+x$ is continu in $x=0$ als de som van twee continue functies;
- de functie $y \mapsto \sqrt{y}$ is continu in $y = 1$;
- de functie $x \mapsto \sqrt{1+x}$ is continu in $x = 0$ als de samenstelling van twee continue functies;
- de functies $g(x) = 1+\sqrt{1+x}$ is continu in $x = 0$ als de som van twee continue functies;
- $1/g(x)$ is continu in $x = 0$ omdat g continu is in $x = 0$ en $g(0) = 2 \neq 0$.

Ook geldt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f(0) = \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Opgave 2 [15pt]

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} \ .$$

Ga na of f differentieerbaar is in $x = 0$.

Beschouw het differentiequotiënt $Q : \mathbb{R} \supset\!\to \mathbb{R}$ van f in $x = 0$,

$$Q(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\frac{|h|}{h(1+|h|)}$$

met $\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stel dat

$$\lim_{h \to 0} Q(h) = q$$

voor een $q \in \mathbb{R}$. Merk op dat q uniek is, omdat 0 een limietpunt is van $\mathrm{Dom}(Q)$. Dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = q$$

voor iedere rij $(h_n)_{n \geq 1}$ met $h_n \neq 0$ en zo dat $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$.

Neem eerst

$$h_n = \frac{1}{n} \ .$$

Dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -1$$

omdat de rationale functie

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

continu is in $x = 0$. Nemen we

$$h_n = -\frac{1}{n} \ ,$$

dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

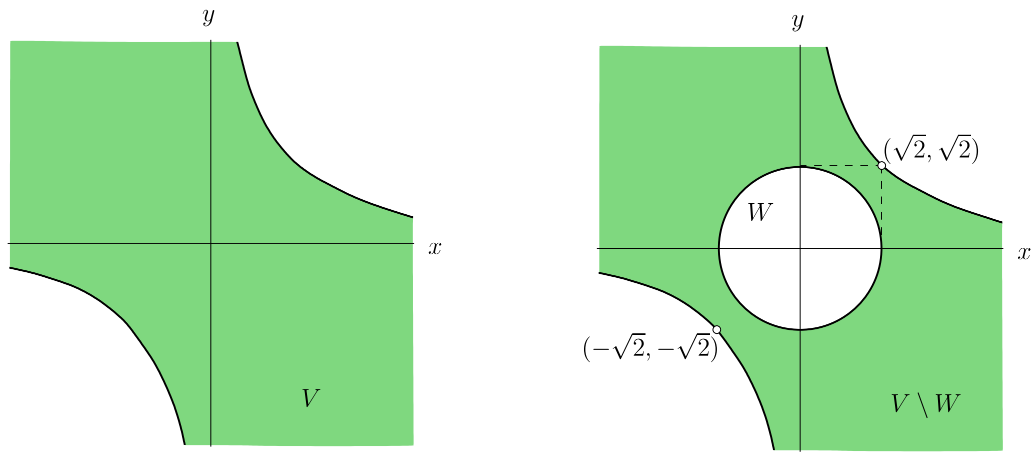
We zouden moeten hebben $q = -1$ en $q = 1$, tegenstelling. Dus heeft $Q(h)$ geen limiet in $h = 0$. De functie f is niet differentieerbaar in $x = 0$.

Opgave 3 [15pt]

Zij $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 2\} \subset \mathbb{R}^2$. Met deze V definiëren we $W \subset \mathbb{R}^2$ door

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \ .$$

(a) Schets V en W.



(b) Is W gesloten in $\mathbb{R}^2$? Waarom wel of waarom niet?

We hebben

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

omdat voor ieder punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 + y^2 \leq 2$ geldt dat $xy < 2$. Inderdaad, in het grens geval

$$y = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0,$$

geldt

$$x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 2 = \frac{x^2 - 2x^2 + 4}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 + 3}{x^2} > 0.$$

Dus is W een gesloten bol in $\mathbb{R}^2$.

(c) Is W gesloten in V? Waarom wel of waarom niet?

Het complement van W in V,

$$V \setminus W = U := \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 > 2\}$$

is open in V. Inderdaad is U het volledige origineel van het open interval $]2, \infty[$ onder de continue functie $f : V \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dus is W gesloten in V.

Opgave 4 [20pt]

Zij (V, d) een metrische ruimte met de afstand functie d. We definieren een functie $\tilde{d} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ met de formule

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in V.$$

Bewijs dat $(V, \tilde{d})$ ook een metrische ruimte is.

Hint: Om de driehoeksongelijkheid te bewijzen, laat zien dat voor $a, b, c \geq 0$ de ongelijkheid $a + b - c \geq 0$ impliceert:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0 \ .$$

(i) Voor alle $x, y \in V$ geldt

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$$

omdat $d(x,y) \geq 0$ voor alle $x, y \in V$. Verder is $\tilde{d}(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $d(x,y) = 0$. Maar dat kan alleen als $x = y$.

(ii) We hebben

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \tilde{d}(y,x)$$

omdat $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in V$.

(iii) Laat $a, b, c \geq 0$ zijn waarvoor $a + b - c \geq 0$. Dan

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} = \frac{(a+b-c) + ab(2+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 0.$$

Voor $x, y, z \in V$ definiëer $a := d(x,z), b := d(z,y), c := d(x,y)$. Er geldt $a, b, c \geq 0$ en $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ zodat $a + b - c \geq 0$. We hebben dus

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0$$

ofwel $\tilde{d}(x,y) \leq \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y)$ voor alle $x, y, z \in V$. Hiermee is de driehoeksongelijkheid bewezen.

We zien dat $\tilde{d}$ alle eigenschappen van de afstandfunctie heeft, dus is $(V, \tilde{d})$ een metrische ruimte.

Opgave 5 [20pt]

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodanig dat $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

voor $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Hint: Laat eerst laat dat

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle $x \geq 2$. Pas dan de inductie naar n toe.

We hebben

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - 2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x} = \frac{(x-2)^2}{2x} \geq 0$$

voor alle $x \geq 2$. Dus, inderdaad

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle $x \geq 2$.

Stel dat $a_n \geq 2$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dan

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \geq 2 \ .$$

Ook geldt dat $a_0 = 3 \geq 2$. Met inductie naar n krijgen we dat $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Hint: Gebruik (a).

Als $x \geq 1$ dan

$$\frac{1}{x} \leq x \ .$$

Uit (a) volgt dat $\frac{a_n}{2} \geq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hieruit blijkt dat

$$\frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} \ .$$

Dus

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$$

ofwel $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bewijs dat (a_n) convergent is en bereken $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

De rij (a_n) is naar beneden begrensd (wegens (a)) en monotoon dalend (wegens (b)). Dus is (a_n) convergent, d.w.z. bestaat er een $a \in \mathbb{R}$ zo dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Bovendien is $a \geq 2$. De functie

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

is continu in elke $x \neq 0$. De limietovergang $n \to \infty$ in

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

levert

$$a = f(a) \quad \text{ofwel} \quad a = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} \ .$$

Dus voldoet a aan de vergelijking $a^2 = 4$. Deze vergelijking heeft twee oplossingen: $a = 2$ en $a = -2$. De tweede is uitgesloten wegens $a \geq 2$. Dus $a = 2$.

Bonus Opgave [10pt]

Neem het interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ en knip daar het middelste derde $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ uit weg. Er blijven twee intervallen over: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Uit elk van deze twee intervallen knippen we weer het middelste deel weg. Als we dat nu oneindig veel keer doen, vinden we als limiet de *Cantorverzameling* Λ.

Bewijs dat Λ gesloten is in $\mathbb{R}$.

De intervalen $]-\infty, 0[$ en $]1, \infty[$ zijn open in $\mathbb{R}$. Ieder uitgeknipte middelste derde is een open interval. Dus is de Cantorverzameling Λ het complement in $\mathbb{R}$ van de (oneindig veel) open deelverzamelingen. Deze vereniging is open. Dus is het complement gesloten. De Cantorverzameling Λ is dus gesloten.