Herkansing Analyse

20 juli 2015, 13:30-16:30

– Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Davide Alboresi, Ralph Klaasse, KaYin Leung of Boris Osorno Torres) en het aantal ingeleverde vellen.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

– Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met

$$m = \sup \{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} < 1.$$

(a). Laat $a_0 \in \mathbb{R}$ en definieer $a_{n+1} = f(a_n)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy rij is.

(b). Bewijs dat er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $f(c) = c$.

2. Zij $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, met $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$, de functie gegeven door

$$f(x, y) = \frac{x^2(1 + x^2y)}{x^2 - y^2}.$$

(a). Bepaal $\mathrm{Dom}(f)$, het maximale domein van f.

(b). Bereken

$$\lim_{x\to 0} f(x, 2x) \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to 0} f(x, x^2).$$

(c). Laat zien dat voor $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to 0} xf(x, x + \lambda x^2) = -\frac{1}{2\lambda}.$$

(d). Bewijs dat de limiet van f in $(0, 0)$ niet bestaat.

Z.O.Z.

3. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie op het open interval (a, b).

(a). Laat $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = 1/x^2$. Toon aan dat f niet uniform continu is op $(0, 1)$.

(b). Bewijs dat f uniform continu is op (a, b) dan en slechts dan als er een continue functie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op het gesloten interval $[a, b]$ bestaat zodat $h(x) = f(x)$ voor $a < x < b$.

(c). Laat $b = \infty$ en neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat. Bewijs dat f uniform continu is op $[a + \epsilon, \infty)$ voor iedere $\epsilon > 0$.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Laat $\underline{S}(f, V)$ de ondersom en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom van f zijn bij een verdeling V van $[a, b]$.

De variatie van f over een interval J met $J \subset I$ is gedefinieerd door

$$\operatorname*{var}_J f := \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in J\}.$$

(a). Laat $V = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ een verdeling van $[a, b]$. Bewijs zonder gebruik te maken van stellingen dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{var}_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

(b). Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Bewijs dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een verdeling V van $[a, b]$ bestaat zodat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon.$$

(c). Laat $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Bewijs dat de functie g Riemann-integreerbaar is en bereken $\int_0^2 g(x)\,dx$.
Hint: laat $\delta > 0$ willekeurig en splits de integraal in drie deelintegralen van 0 tot $1 - \delta$ van $1 - \delta$ tot $1 + \delta$ en van $1 + \delta$ tot 2.

5. (Bonusopgave.) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Stel dat

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \qquad \text{voor iedere begrensde functie } g : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Bewijs dat f identiek nul is.

Normering:

1(a):10	2(a):5	3(a):10	4(a): 10	5:10
1(b):10	2(b):10	3(b):10	4(b): 10	
	2(c):5	3(c):10	4(c): 10	
	2(d):5			