Tentamen Analyse

30 juni 2014, 13:30-16:30

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Ralph Klaasse, Sebastian Klein, KaYin Leung of Roy Wang) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet Lipschitz-continu als er een constante $L > 0$ bestaat zodat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat $|\, f(x) - f(y)\,| \leq L|\, x - y\,|$.

(a). Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-continu. Bewijs dat f uniform continu is.

(b). Laat $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Bewijs dat g Lipschitz-continu is.

(c). Zij $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar en $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$H(x) := \int_a^x h(t)\, dt.$$

Toon aan dat H Lipschitz-continu is.

(d) Is de functie H uit (c) differentieerbaar? Bewijs deze bewering of geef een tegenvoorbeeld.

2. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue functies zijn.

(a). Laat $g(t) \geq 0$ voor alle $t \in [a, b]$. Bewijs dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zodat

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(c) \int_a^b g(t)\, dt.$$

(b). Toon aan dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zodat

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Z.O.Z.

3. Zij (V, d) een gegeven metrische ruimte en laat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy rijen in V zijn. Bewijs dat de rij $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ convergent is.

4. Beschouw de verzameling van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Met de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is V een reële lineaire ruimte.

(a). Toon aan dat voor iedere $f \in V$ het getal

$$\|f\| := \sup\{|\, f(x)\,| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

bestaat.

(b). Toon aan dat $\|\cdot\|$ een norm op V is.

Laat

$$B := \{f \in V \mid \|f\| \leq 1\}.$$

(c). Laat zien dat B een gesloten en begrensde verzameling van V is.

(d). Definieer de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B door $f_n(x) = 1$ voor $x \in [2n, 2n+1]$, $f_n(x) = 1$ voor $x \in [-(2n+1), -2n]$ en $f_n(x) = 0$ voor $x \notin [2n, 2n+1] \cup [-(2n+1), -2n]$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij in B heeft.

(e). Bewijs dat B niet rij-compact is.

5. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x, y) := x^2y^2 + 2xy^2 + y^4$$

en laat $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |\, x\,| \leq 2,\ |\, y\,| \leq 2\}$.

(a). Bereken de stationaire punten van f in $\mathbb{R}^2$.

(b). Bereken de nulpunten van f in $\mathbb{R}^2$.

(c). Bepaal de extrema van f op D en geef aan of de gevonden extremen lokaal dan wel globaal zijn. Bewijs al je beweringen.

	1(a):10	2(a):10	3:10	4(a):5	5(a):5
	1(b):5	2(b):10		4(b):5	5(b):5
Normering:	1(c):5			4(c):5	5(c):10
	1(d):5			4(d):5	
				4(e):5	