Hertentamen Analyse

17 juli 2017, 13:30-16:30

- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Het aanhalen van een stelling als bewijs van een onderdeel van een opgave is niet voldoende.
- Als je in een bewijs stellingen gebruikt, laat dan ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gegeven door

$$a_1 = 7 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2(a_n - 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a). Bewijs dat $a_n > a_{n+1} > 3$ voor alle $n \geq 1$.

(b). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet.

2. Laat $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een continue functie. Voor $c \in \mathbb{R}^m$ is de verzameling $f^{-1}(c)$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

(a). Geef een ϵ-δ bewijs dat iedere eindige doorsnee van gesloten delen van $\mathbb{R}^n$ weer een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is.

(b). Bewijs dat voor $m \geq 1$, de verzameling $f^{-1}(c)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is. (Hint: bewijs eerst het geval $m = 1$ en gebruik vervolgens onderdeel (a).)

(c). Laat zien dat de verzameling $D \in \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ en } x + y + z = 1\}$$

gesloten is.

Z.O.Z.

3. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie op het open interval (a, b).

(a). Laat $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = 1/x^2$. Toon aan dat f niet uniform continu is op $(0, 1)$.

(b). Bewijs dat als f uniform continu is op (a, b) dat er dan een continue functie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op het gesloten interval $[a, b]$ bestaat zodat $h(x) = f(x)$ voor $a < x < b$.

(c). Laat $b = \infty$ en neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat. Bewijs dat als f uniform continu is op (a, c) voor iedere $a < c < \infty$ dat dan f ook uniform continu op (a, ∞) is.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Laat $\underline{S}(f, V)$ de ondersom en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom van f zijn bij een verdeling $V = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ van $[a, b]$.

(a). Bewijs dat f Riemann-integreerbaar als voor iedere $\epsilon > 0$ er een verdeling V van $[a, b]$ bestaat zodat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon.$$

(b). Laat f een strikt monotone functie. Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is.

(c). Laat $a = 0$ en $b = 2$ en laat f gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is en bereken $\int_0^2 f(x)\,dx$.

	1(a):10	2(a):10	3(a) 10	4(a):10
Normering:	1(b):5	2(b):10	3(b) 10	4(b):10
		2(c):5	3(c) 10	4(c):10