Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2003/2004 gegeven door E. van der Ban.

Inleiding Analyse, deel 1 (WISB111)
1 april 2004

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.**: Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.**: Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen! U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Succes!

Opgave 1

a) Toon aan dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq \frac{1}{2}$ en $y \geq \frac{1}{2}$ geldt:

$$\left| \frac{1}{x+y} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|x-1| + |y-1| \right).$$

b) Toon met behulp van de definitie van limiet aan dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}.$$

Opgave 2

Bereken de volgende limieten.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[n+\sin(n!)]^2}{n^2+1}$

U mag bij *a)* gebruik maken van het feit dat de functie $t \mapsto \sqrt{t}$ continu is op $[0, \infty[$. Geef bij zowel *a)* als *b)* duidelijk aan welke rekenregels voor limieten u gebruikt.

Opgave 3

We beschouwen de verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq 0$ en $xy < 1$. Zij L de deelverzameling van A bestaande uit de punten $(0, b)$ met $b \in \mathbb{R}$.

a) Schets A en L.

b) Bewijs dat voor ieder punt $p \in L$ geldt $p \notin \operatorname{inw} A$.

c) Toon aan dat $A \backslash L$ een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

d) Bewijs dat $\operatorname{inw} A = A \backslash L$.

Opgave 4

We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 1$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n^{-1}}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \leq a_{n+1}$.

b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niet naar boven begrensd is.

Opgave 5

Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

a) Geef de definitie van een verdichtingspunt van A.

Gegeven is voorts een rij $(b_n)_{n\geq 1}$ in V die convergeert met limiet $b \in V$. Kan de rij $(b_n)_{n\geq 1}$ is bovendien gegeven dat

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad b_n \in A.$$

b) Bewijs dat $b \in \bar{A}$.