Inleiding in de Analyse 1b (WISB211)
7 juli 2003
Hertentamen Inleiding Analyse B

7 juli 2003, Tijd: 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **uw naam**, en bovendien op het eerste vel uw **studentnummer**, de naam van uw practicumleider (Barbara van den Berg, Benno van den Berg, Bob Rink) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = xy(y - x^2 + 1).$$

(a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \leq 0, y \leq 0$ en $y \geq x^2 - 1$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

(b) Bewijs dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

In het volgende mag u gebruiken dat het inwendige V^{inw} van V bestaat uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x < 0$, $y < 0$ en $y > x^2 - 1$.

(c) Toon aan dat f op $\mathbb{R}^2$ precies 6 stationaire punten heeft waarvan er precies één in V^{inw} gelegen is.

(d) Toon aan dat f op V in precies één punt een lokaal extremum aanneemt en bepaal dat extremum. **Opmerking:** Hierbij mag alleen gebruik gemaakt worden van de theorie die in de cursus Analyse 1B behandeld is.

(e) Bewijs dat $(0, 0)$ een stationair punt is van f, maar dat f geen lokaal extremum aanneemt in $(0, 0)$.

Gegeven is een functie $f :]\,1,2] \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat f monotoon stijgend en begrensd is.

(a) Toon aan dat de verzameling $f(\,]\,1,2])$ een infimum λ heeft.

(b) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er een $a \in]\,1,2]$ bestaat zo dat $f(a) < \lambda + \varepsilon$.

(c) Laten ε, a zijn als in onderdeel (b). Toon aan dat $f(\,]\,1,a]) \subset [\lambda, \lambda+\varepsilon\,[$.

(d) Toon aan dat $\lim_{x\to 1} f(x) = \lambda$.

Opgave 3

Van een functie $f : [0,\infty\,[\to \mathbb{R}$ is gegeven dat hij twee keer differentieerbaar is en dat $f(0) = f'(0) = 0$, terwijl $f''(x) \geq 1$ voor alle $x > 0$.

(a) Toon aan dat $f'(x) \geq x$ voor alle $x \geq 0$.

(b) Toon aan dat $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2$ voor alle $x \geq 0$.

(c) Toon aan dat f een bijectie is van $[0,\infty\,[$ op $[0,\infty\,[$.

We beschouwen nu de functie $g : [0,\infty\,[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = f(x)\sin x.$$

(d) Bewijs dat $g([0,\infty\,[\,) = \mathbb{R}$.

Opgave 4

We beschouwen een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zo dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [0,1]$.

(a) Toon aan dat voor elke verdeling V van $[0,1]$ geldt dat $\underline{S}(f,V) \geq 0$.

(b) Bewijs: als $c \in [0,1]$ en $f(c) > 0$ dan bestaan er $a, b \in [0,1]$ met $a \neq b$, $a \leq c \leq b$ en $f(x) \geq \frac{1}{2}f(c)$ voor alle $x \in [a,b]$.

(c) Bewijs: als f niet overal op $[0,1]$ gelijk is aan nul, dan bestaat er een verdeling W van $[0,1]$ zo dat $\underline{S}(f,W) > 0$.

(d) Bewijs:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$