Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB112 werd in 2003/2004 gegeven door Erik van den Ban.

Inleiding Analyse (WISB112)
24 augustus 2004

- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

a) Toon aan dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq \frac{1}{2}$ en $y \geq -\frac{1}{4}$ geldt:

$$\left|\frac{1}{x+y} - 1\right| \leq 4(|x-1| + |y|).$$

b) Toon vanuit de definitie van limiet aan dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1}{x+y} = 1.$$

Opgave 2

Gegeven zijn een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

a) Geef de definitie van een verdichtingspunt van A; geef ook de definitie van $\bar{A}$ (de afsluiting van A).

b) Geef de definitie van een inwendig punt van A; geef ook de definitie van A^{inw} (het inwendige van A).

Laat verder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij punten in V zijn die convergeert met limiet $a \in V$. Gegeven is dat $a_n \in A$ voor elk even getal $n \in \mathbb{N}$, terwijl $a_n \notin A$ voor elk oneven getal $n \in \mathbb{N}$.

c) Toon aan dat $a \in \bar{A}$.

d) Toon aan dat $a \notin A^{\mathrm{inw}}$.

Opgave 3

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = xy(5 - y^2 - 2x).$$

a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $2x \leq 5 - y^2$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

b) Bewijs dat de verzameling V gesloten is. In het vervolg mag u gebruiken dat de verzameling V begrensd is.

c) Geef het inwendige V^{inw} van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

d) Bepaal alle stationaire punten van f op $\mathbb{R}^2$. Toon aan dat precies één van deze stationaire punten in V^{inw} gelegen is.

e) Toon aan dat f op V in precies één punt een maximum aanneemt en bepaal dat maximum. **Opmerking:** Hierbij mag alleen gebruik gemaakt worden van de theorie die in de cursus Inleiding Analyse behandeld is.

Opgave 4

In deze opgave mag u gebruiken dat sin en cos differentieerbare functies $\mathbb{R} \to [-1,1]$ zijn die voldoen aan $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, voor alle $x \in \mathbb{R}$.
We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = 2x - \sin x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{array}{lll} x > 1 & \Rightarrow & f(x) > x, \\ x < -1 & \Rightarrow & f(x) < x. \end{array}$$

b) Toon aan dat de functie f surjectief is op $\mathbb{R}$, m.a.w., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) Toon aan dat de functie f injectief is.

Opgave 5

Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. We beschouwen een differentieerbare functie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ waarvan de afgeleide functie $f = F'$ begrensd is op $[a,b]$. Zij $V = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ een verdeling van $[a,b]$.

a) Toon aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt:

$$\inf_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq F(x_j) - F(x_{j-1}) \leq \sup_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

b) Toon aan dat $\underline{S}(f,V) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f,V)$.

c) Toon aan dat

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

d) Bewijs: als bovendien gegeven is dat f Riemann-integreerbaar is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$