In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB112 werd in 2002/2003 gegeven door Dr. E.P. van der Ban.

Inleiding in de Analyse 1b (WISB112)
28 april 2003

- Schrijf op ieder vel **uw naam**, en bovendien op het eerste vel uw **studentnummer**, de naam van uw practicumleider (Barbara van den Berg, Benno van den Berg, Bob Rink) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x((x-1)^2 - y^2).$$

(a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq 0$ en $|y| \leq 1 - x$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

(b) Bewijs dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

(c) Geef het inwendige V^{inw} van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

(d) Bepaal alle stationaire punten van f op $\mathbb{R}^2$. Toon aan dat precies één van deze stationaire punten in V^{inw} gelegen is.

(e) Toon aan dat f op V in precies één punt een maximum aanneemt en bepaal dat maximum.
Opmerking: Hierbij mag alleen gebruik gemaakt worden van de theorie die in de cursus Analyse 1B behandeld is.

Opgave 2. Van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven dat hij drie keer differentieerbaar is en dat de derde afgeleide f''' continu is. Bovendien is gegeven dat $f(0) = 1, f'(0) = 0$. Schrijf $c = f''(0)/2$.

(a) Zij $R > 0$. Toon aan dat er een $M_1 > 0$ bestaat zo dat $|f'''(x)| \leq M_1$ voor alle $x \in [-R, R]$.

(b) Zij $R > 0$. Toon aan dat er een constante $M > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in [-R, R]$ geldt

$$f(x) \geq 1 + cx^2 - M|x|^3.$$

(c) Bewijs: als $f''(0) > 0$ dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $|x| < \delta \Rightarrow f(x) \geq 1 + \frac{1}{2}cx^2$.

(d) Toon aan: als $f''(0) > 0$ dan heeft f een lokaal minimum in 0.

(a) Zij $c \in]\,0,1\,[$ en zij W een verdeling van $[0,1]$ die het punt c bevat. De verdeling W is dus van de vorm

$$W = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

waarbij $n \geq 2$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ en tenslotte $c = x_k$ voor een $0 < k < n$.

We merken op dat de verzameling $W_c := W \cap [0,c] = \{x_0 \dots, x_k\}$ een verdeling van het interval $[0,c]$ is. We beschouwen de beperking $f_c := f|_{[0,c]}$ van f tot dit interval. De onder- en bovensom van f_c ten aanzien van de verdeling W_c van $[0,c]$ noteren we met $\underline{S}(f_c, W_c)$ en $\overline{S}(f_c, W_c)$.

Toon aan dat

$$\overline{S}(f_c, W_c) - \underline{S}(f_c, W_c) \leq \overline{S}(f, W) - \underline{S}(f, W).$$

(b) Laat U een verdeling zijn van $[0,1]$ en zij $c \in [0,1]$. Dan is $V = U \cup \{c\}$ een fijnere verdeling van $[0,1]$ (waarbij $V = U$ is toegestaan). Gebruik een resultaat uit het diktaat om te laten zien dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq \overline{S}(f, U) - \underline{S}(f, U).$$

In het vervolg veronderstellen we dat f Riemann-integreerbaar op $[0,1]$ is.

(c) Toon m.b.v. (a) en (b) aan dat f Riemann-integreerbaar op $[0,c]$ is, voor elke $c \in]\,0,1]$.

We definiëren de functie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

(d) Toon aan dat er een $M > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in [0,1]$ geldt $-Mx \leq F(x) \leq Mx$. Hint: gebruik de begrensdheid van f.

(e) Bewijs dat $\lim_{x\to 0} F(x)$ bestaat, en bepaal die limiet.

Opgave 4. Gegeven zijn een metrische ruimte (V,d), een niet-lege deelverzameling $S \subset V$ en een punt $a \in V$.

(a) Toon aan dat

$$\inf\{d(a,x) \mid x \in S\}$$

bestaat. We noteren dit reële getal met $d(a,S)$. Toon aan dat $0 \leq d(a,S)$.

(b) Toon aan dat er voor elke $n \geq 1$ een $x_n \in S$ bestaat zo dat

$$d(a,S) \leq d(a,x_n) \leq d(a,S) + \frac{1}{n}.$$

(c) Toon aan dat a een verdichtingspunt van S is dan en slechts dan als $d(a,S) = 0$.

In het vervolg veronderstellen we dat S gesloten is en dat $a \notin S$.

(d) Toon aan dat $d(a, S) > 0$.

We veronderstellen voorts dat er een $R > d(a, S)$ bestaat zo dat $\bar{B}(a; R) := \{x \in V \mid d(a, x) \leq R\}$ rij-compact is.

(e) Toon aan dat er een $b \in S$ bestaat met de eigenschap dat $d(a, S) = d(a, b)$.