DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB111 WERD IN 2007/2008 GEGEVEN DOOR DHR. E. VAN DEN BAN.

Inleiding Analyse (deel 1) (WISB111)
19 april 2007

- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zo dat

$$\|(x,y) - (3,0)\| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 2 \text{ en } y \geq -1.$$

b) Zij $\delta_1 > 0$ als in (a). Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y) - (3,0)\| < \delta_1$ geldt:

$$\left|\frac{xy}{x+y}\right| \leq |x||y|.$$

c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{xy}{x+y} = 0.$$

Opgave 2

Bereken de volgende limieten:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{[\sin(x-1)]^2}{x^2-1}.$$

Geef daarbij precies aan welke rekenregels je gebruikt.

Opgave 3

We beschouwen de verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $0 < x \leq y$.

a) Schets de verzameling A.

b) Geef de definitie van een inwendig punt a van A.

c) Zij $p > 0$. Toon aan dat het punt $a = (p,p)$ geen inwendig punt van A is.

d) Bewijs dat de verzameling $U := \{\ (x,y) \mid 0 < x < y\ \}$ open is in $\mathbb{R}^2$.

e) Bewijs dat $U = \mathrm{inw}\,(A)$.

Opgave 4

Gegeven is een positief reëel getal $x > 0$. We definiëren de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ inductief door $a_0 = x$ en $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, voor $n \geq 0$.
Veronderstel eerst dat $x < 1$.

a) Laat zien dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotoon stijgend is.

b) Laat zien dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, en bepaal zijn limiet.

Veronderstel nu dat $x \geq 1$.

c) Bewijs dat ook in dit geval de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, en bepaal zijn limiet.

Opgave 5

We beschouwen een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$. We schrijven B voor de afsluiting van A, dwz. $B = \bar{A}$. Gegeven is een punt p in de afsluiting $\bar{B}$ van B.

a) Laat zien dat voor elk geheel getal $n \geq 1$ een $b_n \in B$ bestaat met $d(p, b_n) < \frac{1}{n}$.

b) Laat zien dat voor elk geheel getal $n \geq 1$ een $a_n \in A$ bestaat met $d(b_n, a_n) < \frac{1}{n}$.

c) Bewijs dat $p \in \bar{A}$.

d) Bewijs dat B gesloten is.