DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB121 WERD IN 2009-2010 GEGEVEN DOOR PROF. DR. F. BEUKERS.

Eerste deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121)
03-11-2009

Laat bij elke opgave zien hoe je aan het antwoord komt!

Opgave 1

De lijnen l, m in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$l := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verder is het punt $P = (-1, 1, 0)^t$ gegeven.

a) Laat zien dat P noch op de lijn l, noch op de lijn m ligt. *(0.5 punt)*

b) Laat zien dat l, m noch parallel zijn, noch elkaar snijden. *(0.5 punt)*

c) Zij V het vlak door P en l en W het vlak door P en m. Bepaal de vergelijkingen van V en W. *(0.5 punt)*

d) Laat zien dat er precies één rechte lijn door P bestaat, die zowel l als m snijdt. Bepaal een parametervoorstelling van deze lijn. *(0.5 punt)*

Opgave 2

Stel $a \in \mathbb{R}$ en beschouw het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 9 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & a \end{array}$$

a) Voor welke waarde van a heeft dit stelsel een oplossing? *(1 punt)*

b) Bepaal voor deze waarde van a de oplossingsverzameling. *(1 punt)*

ZOZ

Opgave 3

Stel $k \in \mathbb{R}$ en beschouw de volgende matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Voor welke waarde(n) van k is de rang van M gelijk aan 2? *(1 punt)*

b) Bereken voor de waarde $k = -1$ de inverse matrix. *(1 punt)*

Opgave 4

We beschouwen $\mathbb{R}^3$ met daarin het standaard inproduct $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Ter herinnering: de lengte $|\mathbf{x}|$ van een vector $\mathbf{x}$ is gegeven door $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
In $\mathbb{R}^3$ is een drietal vectoren $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ gegeven zó dat $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{r}| > 0$. De verzameling L is de verzameling van alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt dat $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = |\mathbf{x} - \mathbf{q}| = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$.

a) Bewijs dat de verzameling van alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ met $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = |\mathbf{x} - \mathbf{q}|$ gegeven wordt door $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}\}$. (Hint: Stel $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2$). *(0.5 punt)*

b) Bewijs met behulp van het resultaat van het voorgaande onderdeel dat L gegeven wordt door $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{x} = 0\}$ *(0.5 punt)*

c) Stel $\mathbf{p} = (-1, 2, 3)^t, \mathbf{q} = (-3, 2, 1)^t, \mathbf{r} = (-2, 3, 1)^t$. Bereken L. *(0.5 punt)*

Opgave 5

a) Beschouw de lineaire deelruimte V in $\mathbb{R}^3$ opgespannen door $(1, 0, 1)^t, (2, 1, 0)^t$ en de lineaire deelruimte W opgespannen door $(0, 1, -1)^t, (1, -2, 0)^t$. Bepaal een basis van de deelruimte $V \cap W$. *(1 punt)*

b) Zij V, W een tweetal deelruimtes van $\mathbb{R}^n$ van dimensie r respectievelijk s. Bewijs dat $V \cap W$ een vector $\neq \mathbf{0}$ bevat als $r + s > n$. *(1 punt)*