Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2009-2010 gegeven door Prof. Dr. F. Beukers.

Uitwerking[1] Uitwerkingen eerste deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121) 3 november 2009

Opgave 1

De lijnen l, m in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$l := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verder is het punt $P = (-1, 1, 0)^t$ gegeven.

a) Stel P ligt op l. Dan is er λ zó dat

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

met andere woorden: $-1 = 2 + 2\lambda,\ 1 = 1 - \lambda,\ 0 = 1$. Uit de laatste vergelijking zien we dat het stelsel strijdig is, dus $P \notin l$.
Stel P ligt op m. Dan is er μ zó dat

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

met andere woorden: $-1 = 1 + \mu,\ 1 = 3 + \mu,\ 0 = 1 + 2\mu$. Uit de eerste vergelijking volgt $\mu = -2$ uit de derde $\mu = -1/2$. Het stelsel is dus strijdig en $P \notin m$.

b) De richtingsvectoren $(2, -1, 0)^t$ en $(1, 1, 2)^t$ zijn onafhankelijk en daarom zijn l, m niet parallel. Stel dat l, m elkaar snijden. Dan zijn er λ, μ zó dat

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Met andere woorden: $2 + 2\lambda = 1 + \mu,\ 1 - \lambda = 3 + \mu,\ 1 = 1 + 2\mu$.
Uit de laatste vergelijking volgt $\mu = 0$. Ingevuld in de eerste en tweede vergelijking, $2 + 2\lambda = 1, 1 - \lambda = 3$. Hieruit volgen $\lambda = -1/2$ en $\lambda = -2$. Het stelsel is dus strijdig en l, m snijden elkaar niet.

c) Het vlak V bevat de richtingvectoren $(2, -1, 0)^t$ (van l) en de vector van P naar het steunpunt van l: $(2, 1, 1)^t - (-1, 1, 0)^t = (3, 0, 1)^t$. Een steunpunt wordt gegeven door P. Een parametervoorstelling van het vlak is dus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Door eliminatie van λ, μ hieruit volgt de vergelijking $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$ voor V.
Het vlak W bevat de richtingvectoren $(1, 1, 2)^t$ (van m) en de vector van P naar het steunpunt van m: $(1, 3, 1)^t - (-1, 1, 0)^t = (2, 2, 1)^t$. Een steunpunt wordt gegeven door P. Een parametervoorstelling van het vlak is dus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Door eliminatie van λ, μ hieruit volgt de vergelijking $x_1 - x_2 = -2$ voor W.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

d) Een lijn door P die l snijdt moet in het vlak V liggen. Een lijn die zowel P als m snijdt moet in W liggen. Een lijn door P die zowel V als W snijdt moet dus in de doorsnijding van V en W liggen, maw de gevraagde lijn is precies $V \cap W$.
Kies in de vergelijkingen $x_1+2x_2-3x_3=1$, $x_1-x_2=-2$ de variabele $x_3=t$ met t willekeurig. Uit de tweede vergelijking volget $x_1=x_2-2$. Ingevuld in de eerste, $3x_2-3t-2=1$ en dus $x_2=t+1$ en $x_1=x_2-2=t-1$. Een parametervoorstelling is

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2

Stel $a \in \mathbb{R}$ en beschouw het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 9 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & a \end{array}$$

a) Los het stelsel op door Gauss-eliminatie in schemavorm

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{array}\right)$$

Elimineer x_1 in de eerste kolom,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{array}\right)$$

Verwissel tweede en derde vergelijking,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a \end{array}\right)$$

Elimineer x_2 in tweede kolom

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & a-4 \end{array}\right)$$

Elimineer x_3,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Dit stelsel is strijdig tenzij $a-1=0$, maw $a=1$. In dat laatste geval is er een oplossing.

b) Stel $a=1$. De laatste vergelijking wordt $0=0$ welke we weg kunnen laten. Er blijft over

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 \end{array}\right)$$

De pivotvariabelen zijn x_1, x_2, x_3. Kies $x_4=\tau$ met τ willekeurig. Uit derde vergelijking, $x_3=3+\tau/2$. Uit de tweede volgt $x_2=4+x_3-x_4/2=4+3+\tau/2-\tau/2=7$. Uit de eerste $x_1=x_2-2x_3+x_4/2+5=7-2(3+\tau/2)+\tau/2+5=6-\tau/2$. Oplossing

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^t=(6,7,3,0)^t+\tau(-1/2,0,1/2,1)^t$$

Opgave 3

Stel $k \in \mathbb{R}$ en beschouw de volgende matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Voor welke waarde(n) van k is de rang van M gelijk aan 2? *(1 punt)* We voeren een rijreductie uit op M. Vegen in de eerste kolom geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & k-3 & 2-4k \end{pmatrix}$$

Vegen in de tweede kolom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & 2-4k-(k+1)(k-3)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & -k^2/2-3k+7/2 \end{pmatrix}$$

Als $-k^2/2 - 3k + 7/2 \neq 0$ dan zijn er drie pivot-elementen en is de rang 3. Anders is de rang 2. Uit $-k^2/2 - 3k + 7/2 = 0$ volgt $0 = (-1/2)(k^2 + 6k - 7) = (-1/2)(k + 7)(k - 1)$. Dus als $k = 1$ of $k = -7$ is de rang van M gelijk aan 2.

b) Bereken voor de waarde $k = -1$ de inverse matrix. *(1 punt)* De inverseberekening voor $k = -1$ is standaard.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen eerste kolom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen tweede kolom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tweede rij maal 1/2 derde rij maal 1/6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}\right)$$

Jordanreductie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}\right)$$

De inverse matrix is dus

$$\begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

We beschouwen $\mathbb{R}^3$ met daarin het standaard inproduct $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Ter herinnering: de lengte $|\mathbf{x}|$ van een vector $\mathbf{x}$ is gegeven door $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
In $\mathbb{R}^3$ is een drietal vectoren $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ gegeven zó dat $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{r}| > 0$. De verzameling L is de verzameling van alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt dat $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = |\mathbf{x} - \mathbf{q}| = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$.

a) Beschouw de lineaire deelruimte V in $\mathbb{R}^3$ opgespannen door $(1,0,1)^t, (2,1,0)^t$ en de lineaire deelruimte W opgespannen door $(0,1,-1)^t, (1,-2,0)^t$. Bepaal een basis van de deelruimte $V \cap W$. *(1 punt)*

Stel $|\mathbf{x}-\mathbf{p}| = |\mathbf{x}-\mathbf{q}|$. Kwadrateren en inproduct gebruiken geeft

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}-\mathbf{p}|^2 &= |\mathbf{x}-\mathbf{q}|^2 \\ (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}) &= (\mathbf{x}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \end{aligned}$$

Links en rechts vallen $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ tegen elkaar weg, en ook $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}$ omdat gegeven is dat $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$. Na deling door -2 houden we over, $\mathbf{xp} = \mathbf{xq}q$. Uitgaande van deze gelijkheid kunnen we door omkering van bovenstaande stappen concluderen dat $|\mathbf{x}-\mathbf{q}| = |\mathbf{x}-\mathbf{p}|$. Dus

$$|\mathbf{x}-\mathbf{q}| = |\mathbf{x}-\mathbf{p}| \iff \mathbf{xp} = \mathbf{xq}.$$

b) De gelijkheden zijn equivalent met het tweetal gelijkheden

$$|\mathbf{x}-\mathbf{p}| = |\mathbf{x}-\mathbf{q}| \quad \text{en} \quad |\mathbf{x}-\mathbf{p}| = |\mathbf{x}-\mathbf{r}|$$

Volgens voorgaand onderdeel zijn deze gelijkheden equivalent met

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{q} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}$$

Na nemen van verschil zien we dat deze twee equivalent zijn met

$$(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad (\mathbf{p}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

c) Zij V, W een tweetal deelruimtes van $\mathbb{R}^n$ van dimensie r respectievelijk s. Bewijs dat $V \cap W$ een vector $\neq \mathbf{0}$ bevat als $r + s > n$. *(1 punt)* In dit concrete geval geldt dat $\mathbf{p}-\mathbf{q} = (2,0,2)^t$ en $\mathbf{p}-\mathbf{r} = (1,-1,2)^t$. De verzameling L wordt nu dus gegeven door

$$2x_1 + 2x_3 = 0 \quad \text{en} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Dit is een rechte lijn door $\mathbf{0}$. Kies $x_1 = \tau$ met τ willekeurig. Dan volgt uit de eerste vergelijking dat $x_3 = -\tau$ en uit de tweede $x_2 = x_1 + 2x_3 = \tau - 2\tau = -\tau$. Conclusie

$$L = \{\tau(1,-1,-1)^t | \tau \in \mathbb{R}\}$$

Opgave 5

a) Een vector $\mathbf{u}$ is zowel bevat in V als in W precies dan als er x_1, x_2, x_3, x_4 bestaan zó dat

$$\mathbf{u} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Brengen we de termen met x_1, x_2 naar links, dan moeten we oplossen;

$$-x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Verander x_1, x_2 in $-x_1, -x_2$ dan luidt het stelsel in schemavorm

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eerste kolom vegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tweede kolom vegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

De pivotvariaben zijn nu x_1, x_2, x_3. Kies $x_4 = \tau$ met τ willekeurig. Dan volgt uit de laatste vergelijking dat $x_3 = 5x_4 = 5\tau$. De vectoren in $V \cap W$ worden nu dus gegeven door $\mathbf{u} = x_3(0,1,-1)^t + x_4(1,-2,0)^t = \tau(1,3,-5)^t$. Conclusie, $V \cap W$ heeft dimensie 1 en basis $(1,3,-5)^t$.

b) Zij V, W een tweetal deelruimtes van $\mathbb{R}^n$ van dimensie r respectievelijk s. Bewijs dat $V \cap W$ een vector $\neq \mathbf{0}$ bevat als $r + s > n$.

Kies een basis $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ van V en een basis $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ van W. Om $V \cap W$ te bepalen moeten we het stelsel

$$x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_r\mathbf{v_r} = y_1\mathbf{w_1} + \cdots + y_s\mathbf{w_s}$$

in $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ oplossen. Dit is een homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen in $r+s$ onbekenden. Omdat $r + s > n$ moet er een niet-trivale oplossing zijn. Stel $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s$ is een niet-triviale oplossing. Niet alle ξ_i zijn nul, anders zou gelden $\mathbf{0} = \eta_1\mathbf{w_1} + \cdots + \eta - s\mathbf{w_s}$ in tegenspraak met de onafhankelijkheid van $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$. Omdat niet alle ξ_i nul zijn is $\xi_1\mathbf{v_1} + \cdots + \xi_r\mathbf{v_r}$ een niet-triviale vector in $V \cap W$.