Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2009-2010 gegeven door .

Uitwerking[1] Tweede deeltentamen Lineaire Algebra A (WISB121) 19-01-2010

Opgave 1.

a) De eigenwaardevergelijking van A luidt:

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Uitwerken van de determinant door ontwikkeling naar laatste kolom

$$\begin{aligned} & 2\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = \quad & -4(1-\lambda) + (-1-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-4) = -\lambda^3 + 9\lambda \end{aligned}$$

De eigenwaardevergelijking luidt dus $\lambda^3 - 9\lambda = 0$ en de eigenwaarden zijn $0, 3, -3$. We bepalen nu de eigenvectoren.

Bij $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsruimte bestaat uit alle veelvouden van $(-1, 2, -2)$.

Bij $\lambda = 3$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsruimte bestaat uit alle veelvouden van $(2, 2, 1)$.

Bij $\lambda = -3$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De oplossingsruimte bestaat uit alle veelvouden van $(-2, 1, 2)$.

b) Elke symmetrische matrix heeft een orthonormaal stelsel eigenvectoren. Normeren we de lengte van de zojuist gevonden vectoren op 1 dan krijgen we inderdaad het orthonormale stelsel

$$\frac{1}{3}(-1, 2, -2), \quad \frac{1}{3}(2, 2, 1), \quad \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$$

De matrix C bestaande uit deze vectoren als kolomvectoren luidt

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

is orthogonaal en heeft de eigenschap dat $C^{-1}AC$ de diagonaalmatrix met elementen $0, 3, -3$ is. De gevraagde matrix wordt dus $U = C^{-1} = C^t$.

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Opgave 2.

a) Een basis van V wordt gegeven door $(0,1,0)$ en $(1,0,-1)$ (dit zijn de eenvoudigste vectoren loodrecht op $(1,0,1)$. Merk op dat deze vectoren orthogonaal zijn. Een orthonormale basis wordt dus gegeven door $\mathbf{f_1} = \mathbf{(0,1,0)}$ en $\mathbf{f_2} = \mathbf{(1,0,-1)/\sqrt{2}}$.

b) Onder de rotatie van $\pi/2$ gaat $\mathbf{f_1}$ over in een vector die loodrecht op $(1,0,1)$ staat. Dus $R(\mathbf{f_1}) \in \mathbf{V}$. Bovendien staat $R(\mathbf{f_1})$ loodrecht op $\mathbf{f_1}$. Dus $R(\mathbf{f_1})$ is $\mathbf{f_2}$ of $-\mathbf{f_2}$. Kies de eerste. Omdat R een draaiing is moet dan wel gelden dat $R(\mathbf{f_2}) = -\mathbf{f_1}$.

c) Zij M_R de matrix van R. Dan geldt

$$M_R \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad M_R \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad M_R \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Samengevat, nadat we de eerste gelijkheid door $\sqrt{2}$ gedeeld hebben,

$$M_R \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

De matrix met $(1,0,1)/\sqrt{2}, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ als kolommen is orthogonaal. En dus is de inverse gelijk aan de getransponeerde. Door aan beide zijden van rechts te vermenigvuldigen met deze getransponeerde vinden we

$$\begin{aligned} M_R &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) De afbeelding R is een rotatie om hoek $\pi/2$. De afbeelding R^4 is dus een rotatie om een hoek 2π (dat is 360 graden). Dus R^4 is de identieke afbeelding en de bijbehorende matrix M_R^4 is dus de indentiteitsmatrix.

Opgave 3.

a) De loodrechte projectie van het punt $(1,2,2,1)^t$ wordt gegeven door de vector $\mathbf{x}$ in de ruimte V gegeven door $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ met de eigenschap dat $\mathbf{x} - \mathbf{(1,2,2,1)^t}$ een veelvoud is van de normaalvector $(1,1,-1,1)^t$ van V. Dus $\mathbf{x} = \mathbf{(1,2,2,1)^t} + \lambda\mathbf{(1,1,-1,1)^t}$ voor een nader te bepalen λ. De waarde van lambda volgt door de coördinaten van $(1,2,2,1)^t + \lambda(1,1,-1,1)^t$ is $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ in te vullen. We krijgen,

$$(1+\lambda) + (2+\lambda) - (2-\lambda) + (1+\lambda) = 0$$

waaruit volgt $2 + 4\lambda = 0$ en dus $\lambda = -1/2$. De projectie wordt dus

$$(1,2,2,1) + (-1/2,-1/2,1/2,-1/2) = (1/2,3/2,5/2,1/2).$$

b) De vector $(1,1,-1,1)$ is een vector met eigenwaarde 0. Verder zijn alle vectoren in de deelruimte $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ eigenvector met eigenwaarde 1. Een basis van deze deelruimte wordt gegeven door $(1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1)$. Samen met $(1,1,-1,1)$ geeft dit dus een basis van eigenwaarden.

c) Zij M_P de matrix van de projectie P. Dan moet gelden

$$M_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Samengevat,

$$M_P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing van M_P hieruit geeft

$$M_P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4.

a) Voor een willekeurige 3×3-matrix A en λ een willekeurige scalair λ geldt $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$. Immers elke kolom in λA is met λ vermenigvuldigd. In het bijzonder geldt voor een anti-symmetrische 3×3-matrix X dat

$$\det(X) = \det(X^t) = \det(-X) = (-1)^3 \det(X) = -\det(X).$$

Dus $\det(X)$ is gelijk aan zijn tegengestelde en is daarmee gelijk aan 0.

Als je bovenstaande redenatie niet vindt heb je altijd nog de volgende mogelijkheid. Een willekeuruige anti-symmetrische 3×3-matrix heeft de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Uitwerking van de determinant geeft 0.

b) Merk op dat

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anti-symmetrisch is en determinant 1 heeft.