

Tweede deeltentamen Lineaire Algebra A (WISB121) 18-01-2011

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden. Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!

Opgave 1.

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Laat zien dat $(1, 0, 0, 1)^t$ een eigenvector is *(0.5 punt)*
- b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A . *(1 punt)*
- c) Geef een inverteerbare 4×4 -matrix S zó dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is. *(0.5 punt)*
- d) Is er een orthogonale basis bestaande uit eigenvectoren van A ? Zo ja, bepaal zo'n basis. *(0.5 punt)*

Opgave 2.

Zij $V \subset \mathbb{R}^4$ de itemruimte gegeven door de vergelijkingen

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \text{ en } 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

- a) Bepaal een basis van V . *(0.5 punt)*
- b) Bepaal een orthonormale basis van V . *(1 punt)*
- c) Bepaal de orthogonale projectie van $(1, 2, 3, 4)^t$ op V . *(1 punt)*

Opgave 3.

Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een lineaire afbeelding waarvan gegeven is dat $(1, 1, 1)^t$ een eigenvector is met eigenwaarde -1 en $(1, 2, -1)^t$ een eigenvector met eigenwaarde 2 . Verder is gegeven dat A de vector $(1, 0, 0)^t$ afbeeldt naar $(0, 1, -2)^t$.

- a) (1 pt) Bepaal de matrix van A .
- b) (1/2 pt) Bepaal een basis van het beeld van A .
- c) (1 pt) Bepaal de derde eigenwaarde en een bijbehorende eigenvector.

Opgave 4.

Gegeven is een vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ van lengte 1 en zij V het vlak door de oorsprong dat loodrecht op \mathbf{a} staat.

- a) Geef de definitie van een lineaire afbeelding. *(0.5 punt)*

- b) Bewijs met de standardeigenschappen van het uitwendig product dat de afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ een lineaire afbeelding is. *(0.5 punt)*
- c) Bewijs dat voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de lengte van $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ gelijk is aan de lengte van de loodrechte projectie van \mathbf{x} op V . *(1 punt)*
- d) Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ een orthogonale afbeelding is. *(1 punt)*