Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2010-2011 gegeven door .

Uitwerking[1] Tweede deeltentamen Lineaire Algebra A (WISB121) 18-01-2011

Opgave 1.

a) Merk op dat

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dus hebben we een eigenvector met eigenwaarde 0.

b) Eigenwaarden en eigenvectoren. Tel de eerste rij van de volgende determinant bij de vierde rij op en de tweede bij de derde,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Haal de factor $-\lambda$ uit de derde en vierde rij,

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

en tel de vierde rij twee maal bij de eerste op en de derde éénmaal bij de tweede,

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda)(4-\lambda).$$

De eigenwaarden zijn dus $0, 2, 4$. Bij 0 vinden we de eigenruimte opgespannen door $(1,0,0,1)^t$ en $(0,1,1,0)^t$. Bij $\lambda = 4$ wordt de eigenruimte opgespannen door $(1,0,0,-1)^t$ en bij $\lambda = 2$ door $(0,1,-1,0)^t$.

c) Voor S kunnen we de matrix kiezen met de zojuist gevonden eigenvactoren als kolommen.

d) Antwoord: ja, immers bij iedere symmetrische matrix bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren. De zojuist gevonden vectoren vermenigvuldigd met $1/\sqrt{2}$ vormen een orthonormale basis van eigenvectoren.

Opgave 2.

a) De twee vergelijkingen zijn onafhankelijk. De dimensie van de oplossingsruimte is dus $4 - 2 = 2$. Twee onafhankelijke oplossingen zijn $(1,0,0,-1)^t$ en $(2,-1,3,0)^t$. Zij vormen dus een basis van V. Een basis is natuurlijk ook te vinden door systematisch het stelsel vergelijkingen $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ op te lossen.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

b) We gaan nu Gram-Schmidt toepassen of $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,-1)^t$ en $\mathbf{a}_2 = (2,-1,3,0)^t$. De rijvectoren samen met de Gram-matrix,

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right).$$

Trek de eerste rij van de tweede af om een 0 links onder in de Gram-matrix te maken,

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

De vectoren $(1,0,0,-1)^t$ en $(1,-1,3,1)^t$ vormen een basis van V en zijn tevens orthogonaal. De genormaliseerde vectoren $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^t$ en $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,3,1)^t$ vormen een orthormale basis van V.

c) De projectie van $\mathbf{v} = (1,2,3,4)^t$ op V wordt gegeven door $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2$. De inproducten, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1 = -3/\sqrt{2}$ en $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2 = 12/(2sqrt3) = 2\sqrt{3}$. Dus de projectie wordt

$$-\frac{3}{2}(1,0,0,-1)^t + (1,-1,3,1)^t = (-1/2,-1,3,5/2)^t.$$

Opgave 3.

a) Noem de matrix van A ook weer A. Dan volgt uit onze gegevens dat

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dus

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -7 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) De vectoren $(1,1,1)^t, (1,2,-1)^t, (0,1,-2)^t$ spannen het beeld op van A. De derde vector is het verschil van de eerste twee. De eerste twee vectoren zijn onafhankelijk. Dus heeft het beeld van A dimensie 2 en een basis wordt gegeven door $(1,1,1)^t, (1,2,-1)^t$.

c) Omdat de dimensie van de beeldruimte gelijk is aan 2 moet A een niet-triviale nulruimte hebben. Dat wil zeggen, er zijn eigenvectoren met eigenwaarde 0. Deze nulruimte is de oplossingsruimte van het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Deze blijkt opgespannen te worden door $(1,4,1)^t$. Dit is dus de derde gevraagde eigenvector.

Opgave 4.

a) Een afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heet lineair als voor elke $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ en elke $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dat

1. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$
2. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$

b) Met de standaard eigenschappen van het uitproduct volgt voor alle $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ dat

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x} + \mathbf{a}\times\mathbf{y}$
2. $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{x})$

Dus is $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\times\mathbf{x}$ een lineaire afbeelding.

c) Schrijf $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}$ waarin $\mathbf{v} \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}.$$

Omdat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{v}$ loodrecht op elkaar staan, geldt $|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$. Conclusie, $|\mathbf{a} \times \mathbf{x}| = |\mathbf{v}|$ waarin $\mathbf{v}$ de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op V is.

d) Stel dat $\mathbf{v}$ de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op V is. Schrijf, net als in het voorgaande onderdeel, $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}$. Er geldt $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ en $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \lambda$. Hieruit volgt dat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}.$$

Na het nemen van absolute waarde in het kwadraat:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a} \times \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}|^2.$$

Omdat $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ en $\mathbf{a}$ onderling loodrecht zijn, is dit volgens Pythagoras gelijk aan

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}|^2 + \lambda^2 = |\mathbf{v}|^2 + \lambda^2 = |\mathbf{x}|^2.$$

De afbeelding is lengte behoudend en daarmee orthogonaal. Je kunt opmerken dat de afbeelding niets anders is dan draaiing over 90 graden in het vlak V en draaias $\mathbf{a}$.