10 Pt.

Eerste deeltentamen Lineaire Algebra A

8 november 2011, 13u30-16u30

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider (Victor Blasjo, Esther Bod, Maria Salazar Pinzon, Wouter Stekelenburg, Marti Szilagy, Kirsten/Massimo).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Gegeven in $\mathbb{R}^3$ zijn de punten $P = (1, -1, 0)^t$ en $Q = (-2, 0, 1)^t$ en het vlak V gegeven door de vergelijking $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$. Zij l de lijn door P loodrecht op V en m de lijn door Q loodrecht op V.
   (a) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van l en m.
   (b) (1 pt) Bepaal de afstand tussen l en m.
   (c) (1 pt) Bepaal een vergelijking van het vlak W dat P en Q bevat en dat loodrecht op V staat.

2. Bekijk voor een willekeurig reëel getal a de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1 pt) Voor welke waarden van a is M_a inverteerbaar?
   (b) (1 pt) Bepaal de inverse van M_2 (dat wil zeggen, neem $a = 2$).

3. Zij V het opspansel van de vectoren $(1, 1, 2, 0)^t, (2, 6, 3, -2)^t, (3, -1, 7, 2)^t$ in $\mathbb{R}^4$.
   (a) (1 pt) Bepaal een basis en de dimensie van V.
   (b) (1 pt) Bepaal een stelsel homogene vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ zó dat de oplossingsverzameling precies V is.
   (c) (1/2 pt) Zij m een A een $m \times 4$-matrix zó dat V bevat is in de nulruimte van A. Bewijs dat rang$(A) \leq 2$.

Z.O.Z.

4. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte gegeven door de vergelijkingen $x_1+x_2-2x_3+x_4=0$ en $x_1-3x_3=0$. Zij V de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$(2,0,-1,1)^t, (1,2,-3,1)^t.$$

   (a) (1 punt) Bepaal de dimensie van U en van V.

   (b) (1 punt) Bepaal de dimensie en een basis van $U \cap V$. (Hint: vul de coördinaten van de vectoren van V in de vergelijkingen voor U in).

5. Zij A, B een tweetal $n \times n$-matrices.

   (a) (1/2pt) Bewijs dat het opspansel van de kolommen van AB bevat is in het opspansel van de kolommen van A.

   (b) (1/2 pt) Bewijs dat $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.