

Eerste deeltentamen Lineaire Algebra A  
8 november 2011, 13u30-16u30

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider (Victor Blasjo, Esther Bod, Maria Salazar Pinzon, Wouter Stekelenburg, Marti Szilagy, Kirsten/Massimo).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

OPGAVEN

1. Gegeven in  $\mathbb{R}^3$  zijn de punten  $P = (1, -1, 0)^t$  en  $Q = (-2, 0, 1)^t$  en het vlak  $V$  gegeven door de vergelijking  $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$ . Zij  $l$  de lijn door  $P$  loodrecht op  $V$  en  $m$  de lijn door  $Q$  loodrecht op  $V$ .
  - (a) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van  $l$  en  $m$ .
  - (b) (1 pt) Bepaal de afstand tussen  $l$  en  $m$ .
  - (c) (1 pt) Bepaal een vergelijking van het vlak  $W$  dat  $P$  en  $Q$  bevat en dat loodrecht op  $V$  staat.
2. Bekijk voor een willekeurig reëel getal  $a$  de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (1 pt) Voor welke waarden van  $a$  is  $M_a$  inverteerbaar?
  - (b) (1 pt) Bepaal de inverse van  $M_2$  (dat wil zeggen, neem  $a = 2$ ).
3. Zij  $V$  het opspansel van de vectoren  $(1, 1, 2, 0)^t, (2, 6, 3, -2)^t, (3, -1, 7, 2)^t$  in  $\mathbb{R}^4$ .
    - (a) (1 pt) Bepaal een basis en de dimensie van  $V$ .
    - (b) (1 pt) Bepaal een stelsel homogene vergelijkingen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  in  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  zó dat de oplossingsverzameling precies  $V$  is.
    - (c) (1/2 pt) Zij  $m$  een  $A$  een  $m \times 4$ -matrix zó dat  $V$  bevat is in de nulruimte van  $A$ . Bewijs dat  $\text{rang}(A) \leq 2$ .

Z.O.Z.

4. Zij  $U \subset \mathbb{R}^4$  de deelruimte gegeven door de vergelijkingen  $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$  en  $x_1 - 3x_3 = 0$ . Zij  $V$  de deelruimte van  $\mathbb{R}^4$  opgespannen door de vectoren

$$(2, 0, -1, 1)^t, (1, 2, -3, 1)^t.$$

- (a) (1 punt) Bepaal de dimensie van  $U$  en van  $V$ .
- (b) (1 punt) Bepaal de dimensie en een basis van  $U \cap V$ . (Hint: vul de coördinaten van de vectoren van  $V$  in de vergelijkingen voor  $U$  in).
5. Zij  $A, B$  een tweetal  $n \times n$ -matrices.
- (a) (1/2pt) Bewijs dat het opspansel van de kolommen van  $AB$  bevat is in het opspansel van de kolommen van  $A$ .
- (b) (1/2 pt) Bewijs dat  $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$ .

## UITWERKINGEN

1. Gegeven in  $\mathbb{R}^3$  zijn de punten  $P = (1, -1, 0)^t$  en  $Q = (-2, 0, 1)^t$  en het vlak  $V$  gegeven door de vergelijking  $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$ . Zij  $l$  de lijn door  $P$  loodrecht op  $V$  en  $m$  de lijn door  $Q$  loodrecht op  $V$ .

- (a) De richting van  $l, m$  wordt gegeven door de normaalvector van  $V$ , dus  $(2, -1, 1)^t$ . Parametervoorstelling van  $l$ :  $(1, -1, 0)^t + \lambda(2, -1, 1)^t$  en van  $m$ :  $(-2, 0, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t$ .

- (b) Voor de afstand tussen  $l, m$  zijn er twee methoden:

Methode 1: Kies op  $m$  het punt  $R$  waarvan de afstand tot  $P$  minimaal is. Doordat  $l, n$  parallel zijn, is  $PR$  de afstand tussen de twee lijnen. Bepaling van  $R$ : kies  $\mu$  zó dat het verschil tussen  $(-2, 0, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t$  en  $(1, -1, 0)^t$  loodrecht op  $(2, -1, 1)^t$  staat. Het verschil:  $(-3, 1, 1)^t + \mu(2, -1, 1)^t = 2\mu - 3, -\mu + 1, \mu + 1)^t$ . Loodrecht op  $(2, -1, 1)^t$ :  $0 = 2(2\mu - 3) - (-\mu + 1) + \mu + 1 = 6\mu - 6$ . Dus  $\mu = 1$ , en  $R$  wordt gegeven door  $(0, -1, 2)^t$ . Afstand tussen  $P$  en  $R$ :  $\sqrt{(1-0)^2 + (-1-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$ .

Methode 2: Bepaal de snijpunten  $S, T$  van  $l, m$  met  $V$  en bepaal de afstand tussen  $S$  en  $T$ . Merk hiertoe op de verbindings lijn tussen  $S, T$  loodrecht staat op zowel  $l$  als  $m$ .

- (c) Zij  $W$  het vlak dat  $P$  en  $Q$  bevat en dat loodrecht op  $V$  staat. Gevraagd wordt een vergelijking van  $W$ .

Methode 1: Stel de vergelijking is  $ax + by + cz = d$  waarin  $a, b, c, d$  nog te bepalen zijn. De normaalvector  $(a, b, c)^t$  moet loodrecht staan op de normaal  $(2, -1, 1)^t$  van  $V$ . Dus  $2a - b + c = 0$ . Omdat  $P \in W$  geldt  $a - b = d$  en  $Q \in W$  impliceert  $-2a + c = d$ . Dit geeft een stelsel vergelijkingen in de onbekenden  $a, b, c, d$ . Schematisch:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & d \\ -2 & 0 & 1 & d \end{array} \right).$$

Eliminatie van  $a$  geeft

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & d \\ 0 & -1 & 2 & d \end{array} \right).$$

Eliminatie van  $b$ ,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & d \\ 0 & 0 & 3 & -d \end{array} \right).$$

Kies nu  $d = 3$  (we hebben maar 1 vergelijking nodig). Dan volgt hieruit dat  $c = -1, b = -5, a = -2$ . Een vergelijking wordt dus  $-2x - 5y - z = 3$ .

Methode 2: Twee onafhankelijke richting in  $W$  worden gegeven door  $(2, -1, 1)^t$ , de normaal van  $V$  en  $(3, -1, -1)^t$ , de vector van  $Q$  naar  $P$ . Een parametervoorstelling van  $W$  (met steunvector  $P$ ) wordt gegeven door  $(1, -1, 0)^t + \lambda(2, -1, 1)^t + \mu(3, -1, -1)^t$ . Hieruit leiden we op de standaardmanier een vergelijking van  $W$  af.

2. Bekijk voor een willekeurig reëel getal  $a$  de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) De matrix  $M_a$  is inverteerbaar als zijn gereduceerde vorm drie pivotelementen bevat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eerste rij 2 maal van tweede en 3 maal van derde aftrekken,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 - 2a \\ 0 & 2 & 1 - 3a \end{pmatrix}.$$

We kunnen de tweede en derde rij verwisselen en verder gaan met de eliminatie. We kunnen ook op de standaardmanier verder, maar moeten dan aannemen dat  $a \neq 0$ . Trek in dat geval  $2/a$  maal de tweede rij van de derde af,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 - 2a \\ 0 & 0 & 1 - 3a - \frac{2}{a}(1 - 2a) \end{pmatrix}.$$

De matrix is inverteerbaar als  $1 - 3a - \frac{2}{a}(1 - 2a) \neq 0$ . Met  $a$  vermenigvuldigen en uitwerken:  $-3a^2 + 5a - 2 \neq 0$ . Merk op dat  $-3a^2 + 5a - 2 = 0 \iff a = 1, a = 3/2$ . Conclusie:  $a \neq 1, 3/2$ .

Tenslotte moeten we het geval  $a = 0$  nog uitwerken.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verwissel nu tweede en derde rij en maak de eliminatie af. We zien dat we drie pivots overhouden en dus is de matrix  $M_0$  inverteerbaar.

(b) (1 pt) Inverse van  $M_2$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Eerste rij 2 maal van tweede en 3 maal van derde aftrekken,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Trek 1 maal de tweede rij van de derde af,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Trek de laatste rij  $3/2$  maal van de tweede en tel 1 maal bij de eerste op,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Vermenigvuldig de tweede rij met  $1/2$  en de derde met  $-1/2$ ,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right).$$

De rechtermatrix is de gevraagde inverse.

3. Zij  $V$  het opspansel van de vectoren  $(1, 1, 2, 0)^t$ ,  $(2, 6, 3, -2)^t$ ,  $(3, -1, 7, 2)^t$  in  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Basis en de dimensie van  $V$ . Schrijf de vectoren in kolomvorm en voer rijreductie uit,

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

De gereduceerde vorm bevat twee pivotelementen en wel in kolom 1,2. Dat betekent de rang 2 is en een basis wordt gegeven door de eerste twee vectoren.

- (b) Homogene vergelijkingen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  in  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  zó dat de oplossingsverzameling precies  $V$  is.

Beschouw een vergelijking  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$  die  $V$  in zijn oplossingsruimte bevat. Dan zijn de eerste twee van bovenstaande vectoren in de oplossingsruimte bevat. dat wil zeggen:

$$\begin{aligned}a + b + 2c &= 0 \\2a + 6b + 3c - 2d &= 0\end{aligned}$$

Twee onafhankelijke oplossingen worden gegeven door  $(4, 0, -2, 1)$  en  $(0, 4, -2, 9)$ . Stel nu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dan zijn de twee eerste vectoren van de opgave bevat in de nulruimte van  $A$  en dus is  $V$  bevat in de nulruimte van  $A$ . Verder is de rang van  $A$  gelijk aan twee (de rijen zijn onafhankelijk) en dus heeft  $A$  nulruimte van dimensie  $4 - 2 = 2$ . Daarmee is  $V$  de gehele nulruimte van  $A$ .

- (c) Zij  $m$  een  $A$  een  $m \times 4$ -matrix zó dat  $V$  bevat is in de nulruimte van  $A$ . Er geldt  $\text{rang}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = 4$ . Omdat  $V$  bevat is in de nulruimte moet gelden dat  $\dim(\text{Nul}(A)) \geq 2$ . Dit impliceert dat  $\text{rang}(A) \leq 2$ .
4. Zij  $U \subset \mathbb{R}^4$  de deelruimte gegeven door de vergelijkingen  $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$  en  $x_1 - 3x_3 = 0$ . Zij  $V$  de deelruimte van  $\mathbb{R}^4$  opgespannen door de vectoren

$$(2, 0, -1, 1)^t, (1, 2, -3, 1)^t.$$

- (a) De coefficientenmatrix van de vergelijkingen voor  $U$  luidt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

De rang hiervan is 2. De nulruimte  $U$  heeft dus dimensie  $4 - 2 = 2$ .

De vectoren die  $V$  opspannen zijn onafhankelijk, en dus heeft  $V$  dimensie 2.

- (b) De coördinaten van de vectoren in  $V$  hebben de vorm

$$\lambda(2, 0, -1, 1)^t + \mu(1, 2, -3, 1)^t = (2\lambda + \mu, 2\mu, -\lambda - 3\mu, \lambda + \mu)^t.$$

Om te zien voor welke  $\lambda, \mu$  deze vectoren tot  $U$  behoren, vullen we ze in de vergelijkingen voor  $U$  in.

$$\begin{aligned}0 &= (2\lambda + \mu) + (2\mu) - 2 \cdot (-\lambda - 3\mu) + (\lambda + \mu) = 5\lambda + 10\mu \\0 &= (2\lambda + \mu) - 3 \cdot (-\lambda - 3\mu) = 5\lambda + 10\mu = 0\end{aligned}$$

Oplossing:  $\lambda = -2\mu$  invullen in de vectoren van  $V$  geeft,

$$\mu(-3, 2, -1, -1)^t.$$

De dimensie van  $U \cap V$  is dus 1 en een basis wordt gegeven door  $(-3, 2, -1, -1)^t$ .

5. Zij  $A, B$  een tweetal  $n \times n$ -matrices.
- (a) Voor een willekeurige vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  geldt dat  $A\mathbf{x}$  een vector is die lineaire combinatie is van de kolommen van  $A$ . Dit impliceert dat de kolommen van  $AB$  allemaal lineaire combinaties zijn van kolommen van  $A$ . Daarmee is het opspansel van de kolommen van  $AB$  bevat in het opspansel van de kolommen van  $A$ .
  - (b) Omdat de ruimte opgespannen door de kolommen van  $AB$  bevat is in de ruimte opgespannen door de kolommen van  $A$  geldt dat  $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$ . Immers de rang van een matrix is gedefinieerd als de rang van zijn kolommen, hetgeen gelijk is aan de dimensie (of rang) van de ruimte opgespannen door zijn kolommen.