Tentamen Lineaire Algebra A
27 februari 2003, 14-17 uur

- Bij dit tentamen mogen boek en/of rekenmachine *niet* gebruikt worden.
- Gebruik voor elke opgave een ander vel.
- Schrijf op elk vel je naam, collegekaartnummer en naam van de praktikumleider (één van: Claire Kouwenhoven,Behrooz Mirzaï/ Pieter Hofstra,Barbara van de Berg).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan het antwoord komt!! Succes!

1. De lijnen l, m, n in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$l : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad n : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Laat zien dat l, m noch parallel zijn, noch elkaar snijden.

   (b) Laat zien dat er precies één rechte lijn bestaat, evenwijdig met n, die zowel l als m snijdt. Bepaal een parametervoorstelling van deze lijn.

2. Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & & & + & x_4 & = & b \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

   (a) Voor welke waarde(n) van a, b heeft dit stelsel minstens één oplossing? Hoeveel oplossingen zijn er dan?

   (b) Los het stelsel op voor $a = -1, b = 1$.

3. Zij $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ een vektor ongelijk aan de nulvektor. Beschouw de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x}$$

   waarin $\times$ het uitwendige produkt in $\mathbb{R}^3$ voorstelt. Ter herinnering,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.

(b) Bepaal de kern en het beeld van T. Maak een schets waarin $\mathbf{v}$, $\ker(T)$ en het beeld van T samen voorkomen.

(c) Bewijs dat $T^3\mathbf{x} = -||\mathbf{v}||^2 T\mathbf{x}$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. (Hint: het is voldoende deze relatie aan te tonen voor drie, zelf handig te kiezen, onafhankelijke vectoren.)

(d) Stel $\mathbf{v} = (1, 2, -3)^t$. Bepaal de matrix van T.

4. Zij gegeven het volgende viertal vlakken in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{aligned}$$

waarin a_i, b_i, c_i, d_i reële getallen zijn met de eigenschap dat $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$ voor $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) Stel dat de vier vlakken een punt gemeenschappelijk hebben. Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

EINDE