

Hertentamen Lineaire Algebra

dinsdag 22 maart 2016, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle opgaven, behalve opgave 6, tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er is een bonusopgave (opgave 6, maximaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. Laat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Verklaar waarom deze matrix reëel diagonaliseerbaar is.
- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A .
- Bepaal een basis van zowel de nulruimte $N(A)$ als de kolomruimte $C(A)$ van A .

2. Laat V de ruimte zijn van alle vectoren in \mathbb{R}^5 die voldoen aan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \quad \text{en} \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0.$$

- Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van \mathbb{R}^5 .
- Bepaal een basis van V .
- Bepaal een basis van V^\perp (t.o.v. het standaard-inproduct op \mathbb{R}^5).
- Laat zien dat $\mathbb{R}^5 = V \oplus V^\perp$.

3. Beschouw de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasis. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de basis $\beta = \{(0, 1, 4), (1, 0, 3), (0, 1, 3)\}$.

4. Laat $R = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de vectorruimte zijn van reële 3×3 -matrices. Op R hebben we het volgende inproduct ($A, B \in R$): $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot B^T)$. Laat S de volgende lineaire deelruimte van R zijn:

$$S = \text{vct} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Bepaal een orthonormale basis van S .
 (b) Bepaal de loodrechte projectie van

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

op S .

5. Zij $(\mathbb{R}, U, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Laat $\vec{u} \in U$, we definiëren $S_{\vec{u}} : U \rightarrow U$ door

$$S_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u}.$$

- (a) Toon aan dat voor elke $\vec{u} \in U$ de afbeelding $S_{\vec{u}}$ een lineaire afbeelding is.
 (b) Laat $\vec{v}, \vec{w} \in U$ twee vectoren zijn die loodrecht op elkaar staan. Toon aan dat $S_{\vec{v}} \circ S_{\vec{w}} = S_{\vec{w}} \circ S_{\vec{v}}$.
 (c) Geldt het omgekeerde ook, d.w.z als $S_{\vec{v}} \circ S_{\vec{w}} = S_{\vec{w}} \circ S_{\vec{v}}$ geldt dan $\vec{v} \perp \vec{w}$?
 6. We definiëren voor een willekeurige reële 3×3 -matrix X de sinus hyperbolicus van zo'n matrix door de Taylorreeks-formule

$$\sinh(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- (a) Toon voor een willekeurige inverteerbare 3×3 -matrix G aan dat $\sinh(GXG^{-1}) = G \sinh(X) G^{-1}$.
 (b) Laat A de matrix zijn uit opgave 1. Gebruik de resultaten van die opgave om $\sinh(A)$ te berekenen. Hint: bedenk dat de sinus hyperbolicus van een diagonaalmatrix eenvoudig te berekenen is.