Tentamen Lineaire Algebra
donderdag 12 maart 2015

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam, studentnummer en groepnummer (Groep 1: João Mestre, Julius Linssen, Richard Schoonhoven; groep 2: Dana Balibanu, Matthijs Lip, Steyn van Leeuwen; groep 3 Jan van Zweeden, Menno de Boer; groep 4: Thom Klaasse, Jetze Zoethout; groep 5: Tom Bannink, Lois van der Meijden.
- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er zijn bonusonderdelen (opgave 4c, 5f en 5g, totaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (a) (7 punten) Los voor elke $a \in \mathbb{R}$ het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 4z &= 7, \\ -3x - 2y + 4z &= -1, \\ 6x + y - 8z &= a. \end{aligned}$$

(b) (3 punten) Is de oplossingsverzameling een lineaire deelruimte?

2. (a) (3 punten) Bepaal de nulruimte van

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) (7 punten) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

3. (a) (4 punten) Laat $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de standaard basis zijn van $\mathbb{R}^3$. Toon aan dat $F = \{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ ook een basis is van $\mathbb{R}^3$.
(b) (6 punten) De lineaire afbeelding $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft ten opzichte van de standaardbasis E de matrix:

$$B_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix van B t.o.v. de basis F.

4. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in x met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Laat $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ een inproduct zijn op V.
(a) (6 punten) Bepaal een orthonormale basis van $W = \mathbb{R}[x]_2$, de deelruimte van V die bestaat uit polynomen van graad kleiner of gelijk aan 2.
(b) (4 punten) Bepaal de ortogonale projectie van x^5 op W.
(c) (Bonus opgave, 2 punten) Wat is de afstand van x^5 tot W?

5. Laat $n \geq 2$ en C een symmetrische $n \times n$-matrix met n verschillende eigenwaarden, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, zijn. Definieer voor $a \in \mathbb{R}$ de matrix $C_a = C - aI_n$, waarbij I_n de $n \times n$-identiteitsmatrix is.
(a) (2 punten) Toon aan dat C_a weer symmetrisch is.
(b) (2 punten) Bepaal de eigenwaarden van C_a en toon aan dat alle eigenwaarden van C_a verschillend zijn.
(c) (2 punten) Toon aan dat $C_aC_b = C_bC_a$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}$.
(d) (2 punten) Toon aan dat C_aC_b voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ weer symmetrisch is.
(e) (2 punten) Bepaal de eigenwaarden van C_aC_b voor alle $a, b \in \mathbb{R}$.
(f) (Bonus, 1 punt) Toon aan dat de eigenwaarden van C_aC_b niet altijd verschillend zijn.
(g) (Bonus, 2 punten) Laten A en B symmetrische $n \times n$-matrices zijn die dezelfde eigenruimten hebben, d.w.z. Als $E_\lambda(A)$ een eigenruimte is van A bij eigenwaarde λ dan bestaat er een eigenwaarde μ van B waarvoor de eigenruimte $E_\mu(B) = E_\lambda(A)$ en vice versa. Toon aan dat $AB = BA$.