1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & a-14 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \end{array}\right)$

strydig stelsel als $a \neq -4$.

Voor $a = -4$ is de oplossingsverzameling

$\{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 3,\ x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} x_3 \} = V$

ahvl de lijn: $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geen lineaire deelruimte $\vec{0} \notin V$.

Nakijk (a) • vegen ~~1/~~ punten
• 1 punt $a \neq -4$ strydig stelsel.
• 2 punten $a = -4$ oplossing.
(b) ~~2 punten~~ 1 punt goede oplossing
2 punten argument

2 Kern $= \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- Vegen 2 punten
- Goede antwoord 1 punt.

3
$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda & -2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{-\lambda} + \lambda(4+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(4+\lambda)(-4-\lambda).$$

$\lambda = 0$ eigenw $\rightsquigarrow$ eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -4$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Eigenruimte 2-dim

Nakijk. Vegen 3 punten.
eigenw-polynoom + ontb. 1 p.
$\lambda = 0 \longrightarrow (a)$ 1 p
$\lambda = -\lambda \longrightarrow$ 2 p goede antwoord

3(a) Onafhankelijkheid + stelling dan Basis
3 p   1p.
1

(b) $B(\vec{f}_1) = B(\vec{e}_1) - 2B(\vec{e}_2) + 3B(e_3)$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_3 = \frac{7}{2}(\vec{f}_2 + \vec{f}_3)$$

$B(\vec{f}_2) = B(\vec{e}_1) - B(\vec{e}_2) + B(\vec{e}_3)$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 =$$

$B(\vec{f}_3) = B(\vec{e}_1) + B(\vec{e}_2) + B(\vec{e}_3)$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$$

$\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(f_3 - f_2)$ $\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}\vec{f}_1 + \frac{5}{4}\vec{f}_2 + \frac{1}{4}\vec{f}_3$

$\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 - \frac{3}{4}\vec{f}_2 + \frac{1}{4}\vec{f}_3$

$B(\vec{f}_2) = \vec{f}_1 + \frac{1}{2}\vec{f}_2 + \frac{1}{2}\vec{f}_3$

$B(f_3) = f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{7}{2}f_3$

$$\rightsquigarrow B_F^F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Beeld E uitgedrukt in F 2 punten
Berekening E uitgedrukt in F 2 punten
Berekening B_F^F 2 punten

4

p	$\int_{-1}^{1} x^p \, dx$
0	2
1	0
2	$\frac{2}{3}$
3	0
4	$\frac{2}{5}$
5	0
6	$\frac{2}{7}$
7	0

Uitgebreide Gram matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & x^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & x \\ 0 & 0 & \frac{8}{45} & x^2 - \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

orthonormaal stelsel

$$\vec{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{f}_1 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$$\vec{f}_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{45}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Gram matrix ok. 3 punten "correct" wegen $1\frac{1}{2}$
resultaat $1\frac{1}{2}$

4 vervolg

Projectie $x^5 = \langle x^5 | \vec{f}_0 \rangle \vec{f}_0 + \langle x^5, \vec{f}_1 \rangle \vec{f}_1 + \langle x^5, \vec{f}_2 \rangle \vec{f}_2$

$\boxed{\text{Deze formule goed 2 punten}}$

$$= 0\,\vec{f}_0 + \tfrac{2}{7}\big/\tfrac{2}{3}\,x + 0\,\vec{f}_2$$

$$= \frac{3}{7}x.$$

$\boxed{\text{Berekening verder goed 2 punten}}$

(c) Antwoord ~~x^5~~ lengte van $x^5 - \frac{3}{7}x$. 1 punt

$$\left\| x^5 - \frac{3}{7}x \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^5 - \frac{3}{7}x\right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^{10} - \frac{6}{7}x^6 + \frac{9}{49}x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{11} - \frac{6}{7}\frac{2}{7} + \frac{9}{49}\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{11} - \frac{12}{49} + \frac{6}{49}$$

$$= \frac{2}{11} - \frac{6}{49} = \frac{98-66}{11\cdot 49} = \frac{32}{11\cdot 49}$$

Dus antwoord $7\sqrt{\frac{32}{11}} = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{11}}$

$\boxed{\text{1 punt voor berekening}}$

5 (a) Voor C_a geldt $C = C^T$ en $I_n^T = I_n$.

$C_a = C - aI_n$ dus. $C_a^T = C^T - aI_n^T$

$= C - aI_n = C_a$.

Dus weer symmetrisch

$\boxed{\text{2 punten voor bovenstaande redenering}}$

(b) Laat $\vec{v}_i$ een eigenvector zijn bij eigenw. λ_i

Dan $C_a \vec{v}_i = (C - aI)\vec{v}_i = (\lambda_i - a)\vec{v}_i$

Dus eigenw zijn $(\lambda_i - a_i)$ ~~en~~ zijn allen verschillend omdat alle λ_i verschillend.

1 punt voor berekening eigenw.
1 " voor allen verschillend

(c) C_a ~~is~~ en C_b hebben dezelfde eigenruimten. dus

$$C_a = S\begin{pmatrix} \lambda_1 - a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - a \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{en} \quad C_b = S\begin{pmatrix} \lambda_1 - b & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - b \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$\text{Dus. } C_a C_b = S\begin{pmatrix} \lambda_1 - a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 - b & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - b \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= S\begin{pmatrix} \lambda_1 - b & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 - a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - a \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= C_b C_a.$$

1 punt zelfde eigenruimte
2 punt voor berekening

(d) $(C_a C_b)^T = C_b^T C_a^T = C_b C_a \underset{(c)}{=} C_a C_b$

2 punten voor deze berekening

(e) Laat $\vec{v}_i$ weer eigenvector bij eigenw λ_i

dan is $C_a C_b \vec{v}_i = C_a (\lambda_i - b) \vec{v}_i$

$= (\lambda_i - b) C_a \vec{v}_i$

$= (\lambda_i - b)(\lambda_i - a) \vec{v}_i$

Dus eigenwaarden zijn $(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)$.

1 punt voor idee $\vec{v}_i$ eigenw bij λ_i en
1 punt voor berekening

(f) Neen $a = \lambda_1$ en $b = \lambda_2$ dan.

dan $C_a C_b$ heeft eigenw. $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b) = 0$
en $(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b) = 0$.
Dan vallen de eigenw. van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ samen

1 punt voor deze redenatie

(g) A en B zijn beide diagonaliseerbaar
met vergelijkbare eigenvectoren
laat S de matrix zijn met eigenvectoren
van A zodat A diagonaliseerbaar dan.

$$A = S\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}S^{-1} \quad \text{en} \quad B = S\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}S^{-1}$$

dus.
$$\begin{aligned} A \cdot B &= S\Lambda S^{-1} S M S^{-1} \\ &= S \Lambda M S^{-1} \\ &= S M \Lambda S^{-1} \\ &= S M S^{-1} S \Lambda S^{-1} \\ &= B A. \end{aligned}$$

1 p. voor idee dat dezelfde matrix A en B op diagonaal vorm brengt

1 p. voor bewerkers