Tentamen Lineaire Algebra
dinsdag 26 januari 2016, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Maak elke opgave op een apart vel. Schrijf op elk vel je naam, studentnummer.
- Alle opgaven, behalve opgave 6, tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er is een bonusopgave (opgave 6, maximaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (Nieuw vel papier.) Laat

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & -7 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een LU-factorisatie van A.
(b) Los op $A\vec{x} = (1, -2, -3)^T$.
(c) Bepaal $\det(A)$.
Verdeling punten: 1 p. extra + (a) 3 p. (b) 3 p. (c) 3 p.
Antwoord: (a) We vegen de matrix. Eerst de eerste rij bij de tweede optellen en vervolgens de eerste 2 maal van de derde aftrekken dit geeft:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Nu de tweede rij van de derde aftrekken: } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Dit is de matrix U. De matrix L vinden we door de inverse van bovenstaande veeg operaties uit te voeren:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Noem $U\vec{x} = \vec{y}$, we lossen nu eerst op $L\vec{y} = (1, -2, -3)^T$. Dit geeft $\vec{y} = (1, -1, -4)^T$ en vervolgens $U\vec{x} = \vec{y}$. Dit geeft $\vec{x} = (-\frac{99}{56}, \frac{31}{14}, -\frac{2}{7})^T$.
(c) $\det(A) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot (-112) = -112$.

2. (Nieuw vel papier.) Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de inproductruimte van polynomen in x met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Het inproduct wordt gegeven door ($f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$):

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van $W = \text{span}\{1, 1+x, x^4\}$.
(b) Bepaal de loodrechte projectie van x^5 op W.
Verdeling punten: (a) 7 p. (b) 3 p.
Antwoord: Merk op dat $W = \text{span}\{1, x, x^4\}$. Op deze basis voeren we Gram-Schmidt uit. We bereken eerst $\int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$.
(a) Een orthogonale basis is:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x - \frac{1}{2} \quad w_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & x \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & x^4 \end{vmatrix} = \frac{1}{60}(5x^4 - 4x + 1).$$

vervolgens berekenen we $\langle w_i, w_i \rangle$ voor $i = 0, 1, 2$ respectievelijk dit geeft 1, $\frac{1}{12}$ en $\left(\frac{1}{60}\right)^2 \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{90}\right)^2$. Dus een orthogonale basis wordt gegeven door w_0, $\sqrt{12}w_1$ en $90w_2$.
(b) De projectie wordt gegeven door $\langle w_0, x^5\rangle w_0 + 12\langle w_1, x^5\rangle w_1 + (90)^2 \langle w_2, x^5\rangle w_2 = \frac{1}{6}w_0 + (12)\left(\frac{5}{84}\right) w_1 + (90)^2 \left(\frac{1}{630}\right) w_2 = \frac{1}{6}w_0 + \frac{5}{7}w_1 + \left(\frac{90}{7}\right) w_2 = \frac{15}{14}x^4 - \frac{1}{7}x + \frac{1}{42}$.

3. (Nieuw vel papier.) (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van

$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Is G diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$? Zo, ja geef een diagonaalgedaante. Zo nee, verklaar waarom niet.
(c) Had je het eerste gedeelte van vraag (b) kunnen beantwoorden zonder opgave (a) uit te voeren? Verklaar je antwoord!
Verdeling punten: (a) 2 eigenwaarden + 2 voor eigenvectoren (b) 3 p. (c) 3 p.
Antwoord: (a) Bepaling $\det(G - \lambda \mathbb{I}_3) = -(\lambda - 1)(\lambda - 7)(\lambda - 13)$. Eigenwaarden zijn dus 13, 7 en 1. De bijbehorende eigenvectoren zijn $(2, -1, 2)^T$, $(-1, 2, 2)^T$ en $(2, 2, -1)^T$ respectievelijk.
(b) Drie verschillende eigenwaarden met algebraische multipliciteit 1, dus de 3×3-matrix is diagonaliseerbaar.
(c) Ja, de matrix is symmetrisch en elke symmetrische matrix is reëel diagonaliseerbaar.

4. (Nieuw vel papier.) Voor $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ definiëren we een afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

(a) Bewijs dat dit een inproduct definieert op $\mathbb{R}^3$.
(b) Geef een basis voor

$$(1, 1, -1)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 1, -1) \rangle = 0\}.$$

Verdeling punten: (a) 4 x 1.5 p. (b) 4 p.
Antwoord: (a) We gaan de 4 eisen na.

Lineair in de eerste component:

$\langle\lambda\vec{w}+\mu\vec{x},\vec{y}\rangle =$
$5(\lambda w_1+\mu x_1)y_1+2(\lambda w_1+\mu x_1)y_2+2(\lambda w_2+\mu x_2)y_1+4(\lambda w_2+\mu x_2)y_2+(\lambda w_3+\mu x_3)y_3 =$
$= \lambda\langle\vec{w},\vec{y}\rangle+\mu\langle\vec{x},\vec{y}\rangle.$

Symmetrisch: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$. Dit is duidelijk!
Positief: $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 3x_1^2+2(x_1+x_2)^2+2x_2^2+x_3^2 \geq 0$, immers som van kwadraten.
Definiet: Stel $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 3x_1^2+2(x_1+x_2)^2+2x_2^2+x_3^2 = 0$ dan zijn de kwadraten afzonderlijk 0 en is de enige oplossing $x_1=x_2=x_3=0$. Het omgekeerde geldt ook, d.w.z. als $x_1=x_2=x_3=0$, dan $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=\langle\vec{0},\vec{0}\rangle=0$ (dit volgt ook uit lineariteit).
(b) Merk op dat

$$(1,1,-1)^{\perp}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid 7x_1+6x_2-x_3=0\},$$

dus een basis is bijvoorbeeld $\{(1,0,7)^T,((0,1,6)^T\}$.

5. (Nieuw vel papier.) Zij A een reële $n\times n$-matrix, die n verschillende reële eigenwaarden heeft die alle ongelijk aan 0 zijn en laat B een reële inverteerbare $n\times n$-matrix zijn. A en B commuteren, d.w.z. $AB=BA$.
(a) Toon aan dat als $\vec{v}$ een eigenvector is van A bij eigenwaarde λ dat $B\vec{v}$ ook een eigenvector is van A bij diezelfde eigenwaarde λ.
(b) Toon aan dat $\vec{v}$ ook een eigenvector is voor B.
(c) Bewijs dat B ook diagonaliseerbaar is.
(d) Zijn alle eigenwaarden van B ook verschillend? Zo ja, bewijs dit. Als dit niet per se waar is, geef dan een tegenvoorbeeld.
Verdeling punten: (a) 3 p. (b) 2.5 p. (c) 2.5 p. (d) 2 p.
Antwoord: (a) Laat $\vec{v}$ een eigenvector van A bij eigenwaarde λ, dan is $A(B\vec{v}) = (AB)\vec{v}=(BA)\vec{v}=B(A\vec{v})=B(\lambda\vec{v})=\lambda B\vec{v}$. Omdat B inverteerbaar is is $B\vec{v}\neq\vec{0}$ en is $B\vec{v}$ dus een eigenvector van A bij eigenwaarde λ.
(b) Omdat A nu n verschillende eigenvectoren heeft ongelijk aan 0, is elke eigenruimte één dimensionaal en is $B\vec{v}$ dus een veelvoud (ongelijk aan 0) van $\vec{v}$. Dus $B\vec{v}=\mu\vec{v}$ met $\mu\neq 0$. En is $\vec{v}$ ook een eigenvector van B, bij eigenwaarde μ.
(c) A heeft een basis van eigenvectoren, deze eigenvectoren zijn ook eigenvectoren van B en daarom heeft B dezelfde basis van eigenvectoren. Daarom is B ook diagonaliseerbaar.
(d) Een voorbeeld voor B kan zijn $\mathbb{I}_n$. Dus alleen als $n=1$ heeft B verschillende eigenwaarden. Voor $n>1$, zijn alle eigenwaarden 1 en dus niet verschillend.

6. (Nieuw vel papier. Bonusopgave) Laat U een unitaire $n\times n$-matrix zijn, d.w.z. $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ voldoet aan $\overline{U}^T U=\mathbb{I}_n$. De streep op de eerste factor staat hier voor complex conjugeren, de T voor transponeren.
(a) Bewijs dat $|\det(U)|=1$.
(b) Bewijs dat een eigenwaarde λ van U voldoet aan $|\lambda|=1$.
(c) Bewijs dat $|\mathrm{Tr}(U)|\leq n$.

Verdeling punten: (a) 2 p. (b) 2 p. (c) 1 p.
Antwoord: (a) We gebruiken $\overline{U}^T U = \mathbb{I}_n$, d.w.z.

$$1 = \det \mathbb{I}_n = \det(\overline{U}^T U) = \det(\overline{U}^T) \det(U) = \det(\overline{U}) \det(U) = \overline{\det(U)} \det(U) = |\det(U)|^2,$$

dus $|\det(U)| = 1$.
(b) Laat $\vec{v}$ een eigencvector bij eigenwaarde λ, dan geldt voor het standaard Hermitische product:

$$|\lambda|^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \overline{\lambda}\lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \langle U\vec{v}, U\vec{v} \rangle = \overline{(U\vec{v})}^T U\vec{v} = \overline{\vec{v}}^T \overline{U}^T U\vec{v} = \overline{\vec{v}}^T \mathbb{I}_n \vec{v} = \overline{\vec{v}}^T \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle,$$

Dus $|\lambda|^2 = 1$ en geldt ook $|\lambda| = 1$.
(c) $Tr(U)$ = som van de eigenwaarden van U, deze geteld met hun (algebraische) multipliciteit. Dus

$$|\mathrm{Tr}(U)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$